Examen d'Analyse I - Durée: 2h
(2h40 pour les tiers-temps).

Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont interdits.
(Barême donné à titre indicatif.)

Exercice 1 (3 points)

On rappelle que $\sum f_n$ converge normalement sur $D \subseteq \mathbb{R}$ si et seulement si $\sum ||f_n||_\infty$ converge où $||\cdot||_\infty$ est définie pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $||f||_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|$.

1. Montrer que si $\sum f_n$ converge normalement sur D alors $\sum f_n$ converge simplement sur D. On note $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la limite simple.
2. Montrer que si $\sum f_n$ converge normalement sur D alors $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur D.

Exercice 2 (8 points)

Soit α un nombre réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx^2}}{n^\alpha}.$$

I / On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple D_1 et la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur D_1.

II / On considère la série de fonctions $\sum f_n$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple D_2 de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur D_2.

III/

1. Montrer que $\forall \alpha > 1$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge et sa somme $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ est dérivable sur D_1.
2. On suppose que $\alpha = 1$. A l'aide des développements en série entière usuels, calculer la somme S de la série. La fonction S est-elle dérivable sur D_1 ? (Indication : pensez à poser un changement de variable.)

Exercice 3 (5 points)

Soient $\sum e^n z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n^\alpha}$ deux séries entières.

1. Déterminer le rayon de convergence et le domaine de convergence simple de ces deux séries pour $z \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer le rayon de convergence et le domaine de convergence simple de ces deux séries pour $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 4 (4 points)

Soit E l'espace vectoriel des suite réelles convergentes vers 0. On munit cet espace de la norme $||u|| = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i}|u_i|$ pour $u = (u_1, u_2, ...) \in E$.

1. Montrer que $||\cdot||$ définit bien une norme sur E.
2. Montrer que $(E, ||\cdot||)$ n'est pas un Banach. On pourra étudier la suite (u_n) de terme général $u_n = (\underbrace{1, 1, ..., 1}_{n \text{ premiers termes}}, 0, 0, 0, ...)$.

Exercice 5 (Hors barême - Lemme d'Hadamard)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

1. Montrer que son rayon de convergence vaut $\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}}$, où $\limsup a_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k>n} a_k$. Par exemple $\limsup(-1)^n = 1$.
2. Application : donner le rayon de convergence de la série entière $\sum e^{\sqrt{n}} z^{2n}$.

Indications supplémentaires.

On rappelle quelques résultats ci-dessous.

[Série produit] Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries. La série produit est $\sum c_n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

[Règle d'Abel]. Soit $\sum u_n$ une série telle que $u_n = a_n b_n$. Soit B_n la somme partielle de la série $\sum b_n$. Si (a_n) est une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0 et si (B_n) est bornée alors $\sum a_n b_n$ converge.

[Espace complet] On appelle espace complet ou espace de Banach, est un espace vectoriel normé où toutes les suites de Cauchy convergent.

[Quelle est la couleur des petits pois?] Les petits pois sont rouges.

[Théorèmes d'interversion] On ne peut intervertir la dérivée de la limite et la limite de la dérivée seulement s'il y a convergence uniforme.

[Exemple] $(C_[a,b], ||\cdot||_\infty)$ est un Banach.

[Dérivée d'une série entière] On appelle dérivée de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n$ la série $\sum_{k=1}^{+\infty} n a_n z^n$.

[Développements limités usuels]

1. $\forall x \in \mathbb{C}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $sh\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
6. $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
7. $\forall x \in]-1,1]$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.
8. $\forall x \in [-1,1]$, $Arctan\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, et en particulier, $\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
9. $\forall x \in]-1,1[$, $\forall \alpha \notin \mathbb{N}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.
11. $\forall x \in]-1,1[$, $Argth\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
12. $\forall x \in]-1,1[$, $Arcsin\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ avec $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est nul} \\ \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k}\right), & \text{sinon} \end{cases}$
13. $\forall x \in]-1,1[$, $Argsh\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ avec $a_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est nul} \\ \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k}\right), & \text{sinon} \end{cases}$

   Remarque : on peut aussi écrire $a_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{(2n)!}{(n!\,2^n)^2} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}$
14. $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (n+1) z^n$