INSA Toulouse. STPI $2^{\text{ème}}$ année 2008-2009
Préorientations IMACS
Feuille de TD 5

Séries Entières

Exercice n°1

Déterminer le rayon de convergence et le domaine de convergence simple des séries entières de terme général suivant :

1. $u_n(x) = \dfrac{\ln n}{n^2} x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

   On a $a_n = ln(n)/n^2$. D'où $a_{n+1}/a_n \sim_{+\infty} 1$. Donc $R = 1$ d'après la règle de d'Alembert. On sait que le domaine de convergence de la suite satisfait : $D \subseteq [-R, R]$ et $]-R, R[\subseteq D$. Donc il suffit d'étudier ce qui se passe en $x = R = 1$ et en $x = -R = -1$. Pour $x = 1$, la série $\sum ln(n)/n^2$ converge d'après le critère de Riemann. Pour $x = -1$, la série est absolument convergente (d'après le même critère de Riemann). Donc le domaine de convergence est $D = [-1, 1]$.

2. $u_n(z) = \dfrac{z^n}{n^{3n}}, n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$. On a $a_n = 1/(n^{3n})$. D'où $a_n^{1/n} = 1/(n^3) \to_{n\to+\infty} 0$. Donc $R = +\infty$ et $D = \mathbb{C}$.

3. $u_n(x) = \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right) x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

   On a $a_n = sin(1/2^n)$. D'où $sin(1/2^n) \sim_{+\infty} 1/2^n$ et donc $a_{n+1}/a_n \sim_{+\infty} 1/2$. Donc $R = 2$. Pour $x = 2$, $sin(1/2^n)x^n \sim_{+\infty} 1$, donc $\sum a_n x^n$ diverge. Pour $x = -2$, $sin(1/2^n)x^n \sim_{+\infty} (-1)^n$, donc la série $\sum a_n x^n$ diverge aussi. Conclusion : $D =]-2, 2[$.

4. $u_n(x) = n^{\ln n} x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

   On a $a_n = n^{ln(n)}$. Donc $a_n^{1/n} = n^{ln(n)/n} \to_{n\to+\infty} 1$. Donc $R = 1$. Pour $|x| = 1$, la série $\sum a_n x^n$ diverge car a_n ne tend pas vers 0, on a une divergence grossière. Donc $D =]-1, 1[$.

5. $u_n(x) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

   On a $a_n = ln(n + 1/n) \sim_{+\infty} 1/n$. Donc $a_{n+1}/a_n \to_{n\to+\infty} 1$. D'où $R = 1$. Pour $x = 1$, la série diverge $\sum a_n x^n$ diverge car elle est positive et équivalente à la série harmonique qui diverge elle aussi. Pour $x = -1$, la série $\sum a_n x^n$ converge car c'est une série alternée et a_n est décroissante, positive et tend vers 0. Donc $D = [-1, 1[$.

6. $u_n(x) = \left(\dfrac{4n+3}{n+1}\right)^n x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

   On a $a_k = \begin{cases} \left(\frac{4n+3}{n+1}\right)^{k/2} & \text{si } k = 2n \\ 0 & \text{si } k = 2n+1 \end{cases}$.

   Les théorèmes de d'Alembert et de Cauchy ne servent à rien dans ce cas, car par exemple:

$$a_k^{1/k} \to_{n\to+\infty} \begin{cases} 2 & \text{si } k = 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$(a_k^{1/k})_{n\in\mathbb{N}}$ n'a donc pas de limite en $+\infty$. Il faut revenir aux définitions.

En développant $a_n x^n$ avec des équivalents, on trouve:

$$\left(\frac{4n+3}{n+1}\right)^n x^{2n} \sim_{+\infty} (4x^2)^n e^{-1/4}.$$

On reconnait le terme d'une série géométrique. Donc $\sum a_n x^n$ converge si seulement si $4x^2 < 1$, i.e. si et seulement si $x < 1/2$. Donc $R = 1/2$ et $D =]-1/2, 1/2[$.

Exercice n°2

Déterminer le rayon de convergence, le domaine de convergence simple et la somme des séries entières réelles suivantes :

1. $u_n(x) = \mathrm{ch}(na)x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$.

   On se rappelle que $a_n = ch(na) = \frac{e^{na}+e^{-na}}{2}$. Donc :

   - si $a > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim_{+\infty} e^a$.
   - si $a < 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim_{+\infty} e^{-a}$.
   - si $a = 0$, $ch(na) = 1$.

   On voit que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim_{+\infty} e^{|a|}$. Donc $R = R(a) = e^{-|a|}$.

   Pour $x = e^{-|a|}$, $u_n(x) = 1/2 + \frac{e^{-2n|a|}}{2}$. Or $\sum 1/2$ diverge et $\sum \frac{e^{-2n|a|}}{2}$ converge. Donc, $\sum u_n(x)$ diverge. On peut faire un raisonnement identique pour $x = -e^{-|a|}$. On conclut que $D =]-e^{-|a|}, e^{|a|}[$.

   Reste à calculer la somme. Soit $x \in D$. On a $u_n(x) = \frac{1}{2}((e^a x)^n + (e^{-a}x)^n)$. On se rend compte que $\sum u_n(x)$ est la somme de deux séries géométriques convergentes (car $x \in D$), dont on sait calculer les sommes partielles.

   On pose :

   $$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} u_n(x) && (1)\\ &= 1/2 \sum_{k=0}^{n} (e^a x)^k + (e^{-a}x)^k && (2)\\ &= 1/2\left(\frac{1-(e^a x)^{n+1}}{1-e^{ax}} + \frac{1-(e^- ax)^{n+1}}{1-e^{-ax}}\right). && (3)\end{aligned}$$

   Pour $x \in D$, on obtient finalement, $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 1/2\left(\frac{1}{1-e^a x} + \frac{1}{1-e^{-ax}}\right) = ... = \frac{1-ch(ax)}{2-2ch(ax)}$.

2. $u_n(x) = n^{(-1)^n} x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

   On a $a_n = n^{(-1)^n}$. Les règles de Cauchy et de d'Alembert ne permettent pas de conclure sur le rayon de convergence. Par exemple $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ diverge vers $+\infty$ si n est impair, et converge vers 0 si n est pair. $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'admet donc pas de limite en $+\infty$.

   Pour trouver le rayon de convergence, il faut donc chercher d'autres moyens. Un de ceux possibles est le suivant. On a $n^{(-1)^n} \geq \frac{x^n}{n}$. Et la série du minorant converge si et seulement si $x \in [-1,1[$. Donc $R \leq 1$. On a aussi $n^{(-1)^n} \leq nx^n$. Et la série du majorant converge si et seulement si $x \in]-1,1[$. Donc $R \geq 1$. Pour conclure : $R = 1$. Pour le domaine de convergence simple, il suffit d'étudier ce qui se passe en $x = 1$ et $x = -1$. Dans les deux cas, $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$ donc $\sum u_n(x)$ diverge. Donc $D =]-1,1[$.

On souhaite maintenant calculer la somme. Pour le faire, les développements en séries entières donnés à la fin de cette feuille de correction sont très utiles. En utilisant le développement numéro 14, on se rend compte que la série de termes pairs est de rayon 1 et vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2n(x^2)^n = 2(x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} n(x^2)^{n-1} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Celle des termes impairs $\sum \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ est de rayon de convergence 1 et de somme $argth(x)$.

La somme de la série étudiée est donc $\frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + argth(x)$.

3. $u_n(x) = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

   Soit $a_n = 1 + 1/2 + ... + 1/n$. Le quotient a_{n+1}/a_n est égal à $1 + \frac{1}{(n+1)a_n}$ et tend vers 1. Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est donc égal à 1. On remarque ensuite (eh oui... voir page 12 du polycopié) que le produit des séries entières $\sum_{n\geq 0} x^n$ et $\sum_{n\geq 1} x^n/n$ est $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$. On en déduit (cf. théorème 4.9 du polycopié) que $\forall x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{ln(1-x)}{1-x}$.

Exercice n°3

Soit S la somme de la série entière $\sum \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$, $n \geq 0$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série.

   Soit $u_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$. On a :

   $$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = x^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{(n+2)(2n+3)} \rightarrow_{n\to+\infty} x^2.$$

   Donc $\sum u_n(x)$ converge seulement si $x^2 \leq 1$ et converge si $x^2 < 1$. Donc $R = 1$. Pour $x = 1$ et $x = -1$ la série $\sum u_n(x)$ converge absolument d'après le critère de Riemann.

2. Montrer que S est continue sur $[-1,1]$.

   La continuité est immédiate d'après le théorème 4.11 du polycopié.

3. Déterminer pour tout $x \in]-1,1[$, $S'(x)$. En déduire $S(x)$.

   On a :

   $$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+2}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+1} && (4) \\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} && (5) \\ &= ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ ou argth(x) cf. développements usuels.} && (6) \end{aligned}$$

Donc $S = \int argth$. En intégrant par parties, on trouve :

$$S(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \ln 1 - x^2) + C.$$

De plus $S(0) = 0$ donc $C = 0$ et finalement :

$$S(x) = argth(x) + \frac{1}{2} ln(1-x^2).$$

4. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$.

   Puisque S est continue en 1, on peut écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = \lim_{x \to 1^-} S(x) = 2\ln(2)$

Exercice n°4

Développer en séries entières du réel x les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (2+x)e^x$.

   Si f_1 est $DSE(0)$ (développable en série entière autour de 0) alors son $DSE(0)$ correspond à son développement de Taylor :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

   Il faut donc commencer par calculer le $f_1^{(n)}(0)$ pour tout n. Ensuite, on étudiera sur quel intervalle $f_1(x)$ est égale à son développement de Taylor.

   On a $f_1'(x) = (2+x)e^x + e^x = f_1(x) + e^x$. Par récurrence on trouve (allez à l'ordre 2 pour vous en convaincre), $f_1^{(n)}(x) = f_1(x) + ne^x$. Donc le développement de Taylor de f_1 est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+n}{n!} x^n.$$

   La règle de d'Alembert nous indique que le rayon de convergence de cette série est $R = +\infty$.

   Il reste à trouver sur quel intervalle de $\mathbb{R}$. f_1 est égale à son $DSE(0)$. Pour ce faire, on peut utiliser la formule de Taylor-Young. On a :

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_1^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f_1^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \text{ avec } c \in]0, x[.$$

   En posant $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_1^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{2+k}{k!} x^k$, on se rend compte que

$$|S_n(x) - f_1(x)| = \left| \frac{2+c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \text{ avec } c \in]0, x[\text{ ou }]x, 0[\text{suivant que } x > 0 \text{ ou } \; x < 0.$$

   Quel que soit le signe de x on a $\left| \frac{2+c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \left| \frac{2+|x|}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$. Ce terme tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+n}{n!} x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. $f_2(x) = \ln(2+x)$.

   On connait le $DSE(0)$ de $ln(1+x)$. Il est donc naturel de faire un DSE non pas centré autour de 0, mais autour de -1. Soit $g(x) = ln(1+x)$. D'après le 7ème $DSE(0)$ classique de cette feuille, on voit que :

   $$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in]-1, 1].$$

   Donc $f_2(x) = g(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+1)^n}{n} \quad \forall x \in]-2, 0]$. On peut noter ce développement sous la forme $DSE(-1)$.

   Il existe une autre solution pour se ramener à un $DSE(0)$. On remarque que $ln(2+x) = ln(2(1+x/2)) = ln(2) + ln(1+x/2)$. Donc le $DSE(0)$ de $ln(2+x)$ est :

   $$ln(2+x) = ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n} x^n \quad \forall x \in]-2, 2].$$

   Il est à noter qu'avec cette stratégie, on a un rayon de convergence égal à 2 alors qu'avant on n'avait obtenu que $R = 1$. De plus, cette stratégie permet de calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto ln(2+x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $f_3(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$.

   Un classique du genre. On remarque après quelques calculs que :

   $$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = x \left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} \right].$$

   On connait le $DSE(0)$ de $\frac{1}{1-x}$ sur $]-1, 1[$. On remarque ensuite que

   $$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x/2}.$$

   Donc $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \; \forall x \in]-2, 2[$. Finalement, on voit que :

   $$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = x \left[\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \right]$$

   pour tout $x \in]-1, 1[\cap]-2, 2[=]-1, 1[$. Finalement, on trouve que le $DSE(0)$ de f_3 est valable pour tout $x \in]-1, 1[$ et vaut :

   $$\begin{aligned} \frac{x}{(x-1)(x-2)} &= x \left[\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \right] && (7) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}}) x^{n+1} && (8) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{1}{2^n}) x^n && (9) \end{aligned}$$

4. $f_4(x) = \dfrac{1-x}{(x+1)^2}$.

   En utilisant l'équation 9 du formulaire on trouve :

$$(x+1)^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n$$

   pour tout $x \in]-1,1[$

   D'où $\frac{1-x}{(x+1)^2} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n$ sur $]-1,1[$. On développe et sauf erreur de ma part, on trouve :

$$f_4(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(2n+1)x^n$$

5. $f_5(x) = e^{-x^2/2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2/2}dt$.

   L'intérêt de cet exercice est le suivant : une intégrale de ce genre (en l'occurrence une Gaussienne) est en général incalculable. Trouver son développement en série entière permet donc d'en faire une approximation par des polynômes qui sont eux calculables.

   On résoud cet exercice avec une technique différente des autres... Pour alléger les notations, on pose :

$$g(x) = e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}dt.$$

   Donc $g'(x) = -xe^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2} + 1 = -xg(x) + 1$. g satisfait donc l'équation différentielle suivante :

$$g' + xg = 1.$$

   On va maintenant chercher la solution de cette équation différentielle sous la forme d'une série entière :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

   La série entière satisfait :

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}}_{g'(x)} + x\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}_{g(x)} = 1.$$

   Pour x appartement au domaine de convergence de la série $\sum a_n x^n$, on a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n & (10)\\
= & \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} & (11)\\
= & \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n & (12)\\
= & a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}]x^n. & (13)
\end{aligned}$$

Donc la suite (a_n) satisfait :

$$\begin{cases} a_0 = g(0) = 0 \\ a_1 = 1 \text{ (cf. équation différentielle)} \\ a_{n-1} + (n+1)a_{n+1} = 0 \forall n \geq 1. \end{cases}$$

On écrit ces relations...

$$a_0 + 2a_2 = 0 \tag{14}$$
$$a_2 + 4a_4 = 0 \tag{15}$$
$$a_4 + 6a_6 = 0... \tag{16}$$

Donc les termes pairs de la suite sont tous nuls. On fait de même pour les termes impairs...

$$a_1 + 3a_3 = 0 \tag{17}$$
$$a_3 + 5a_5 = 0 \tag{18}$$
$$a_5 + 7a_7 = 0... \tag{19}$$

Donc $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_5 = \frac{1}{3 \cdot 5}$, $a_7 = -\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7}$. On infère que :

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1)}.$$

On le montre facilement par récurrence. Finalement on voit que la seule série entière qui satisfait l'équation différentielle est la série :

$$f_5(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1)} x^{2n+1}.$$

Son rayon de convergence est $R = +\infty$ (comparaison factorielle avec fonction puissance).

6. $f_6(x) = (\text{Arcsin} x)^2$.

   Cet exercice est similare au précédent sauf qu'il faut aller à l'ordre 2. On a $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} arcsin(x)$ et $f''(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} f'(x)$. Donc f_6 satisfait l'équation différentielle :

   $$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2.$$

   On obtient l'expression de la série entière comme dans l'exercice précédent.

   On obtient:

   $$f_6(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!(n+1)} x^{2n+2}.$$

Exercice n°5

Montrer qu'il existe pour les deux équations différentielles suivantes des solutions développables en séries entières.

Déterminer le rayon de convergence des séries obtenues et calculer leur somme.

1. $xy'' + 2y' + xy = 0$.
2. $x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0$.

Développements en série entière usuels

Ces développements usuels sont souvent très utiles dans le calcul d'intégrales. Ils sont donnés ici avec indication du rayon de convergence dans le champ complexe ou réel.

1. $\forall x \in \mathbb{C}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $sh\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
6. $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
7. $\forall x \in]-1,1]$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.
8. $\forall x \in [-1,1]$, $Arctan\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, et en particulier, $\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
9. $\forall x \in]-1,1[$, $\forall \alpha \notin \mathbb{N}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.
11. $\forall x \in]-1,1[$, $Argth\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
12. $\forall x \in]-1,1[$, $Arcsin\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ avec $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est nul} \\ \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k}\right), & \text{sinon} \end{cases}$
13. $\forall x \in]-1,1[$, $Argsh\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ avec $a_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est nul} \\ \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k}\right), & \text{sinon} \end{cases}$

    Remarque : on peut aussi écrire $a_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{(2n)!}{(n!\,2^n)^2} = \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}$
14. $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (n+1) z^n$