INSA Toulouse, Département STPI. **Année 2011-2012**
IMACS 2^e année.

Feuille de TD n° 4.

Suites et séries de fonctions

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par:

$$\forall x \in [0,+\infty[, f_n(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^n}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et uniformément sur $[0,+\infty[$.

   On commence par la **convergence simple**. On a $f_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De plus, pour $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x^2)^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Pour conclure, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle : $f = 0$.

   On étudie la **convergence uniforme**. On a :

   $$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} \left|\frac{x^3}{(1+x^2)^n}\right| = \sup_{x\in[0,+\infty[} \frac{x^3}{(1+x^2)^n}$$

   Ici, il faut se méfier d'une conclusion hâtive : la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$ ne converge pas forcément vers 0 en $+\infty$. Pour ne pas faire d'erreur, on évalue le suprémum explicitement :

   $$f_n'(x) = \frac{x^2(1+x^2)^{n-1}(3(1+x^2) - 2x^2n)}{(1+x^2)^{2n}}.$$

   Donc f_n' s'annule en 0 et en $x = \sqrt{\frac{3}{2n-3}}$. Comme $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, on a :

   $$\|f_n - 0\|_\infty = f_n\left(\sqrt{\frac{3}{2n-3}}\right) = \left(\frac{3}{2n-3}\right)^{3/2} \frac{1}{\left(1+\frac{3}{2n-3}\right)^n} \leq \left(\frac{3}{2n-3}\right)^{3/2}.$$

   Donc on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

2. On pose: $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$ pour tout $x > 0$.

   Les difficultés de cet exercice sont de deux ordres. Premièrement, on travaille sur un domaine non borné, or tous les résultat d'interversion limite et intégrale reposent sur une hypothèse de domaine borné. De plus, on étudie la suite des primitives $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour laquelle on n'a pas vu de résultats en cours.

(a) Etudier la convergence simple de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$. Sans démonstration supplémentaire, en déduire un domaine de convergence uniforme de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$, elle converge uniformément sur tout domaine borné du type $[0,A]$, $A\in\mathbb{R}_+$. D'après le théorème d'interversion limite et intégrale, on peut donc affirmer que :

$$F_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = 0.$$

Donc $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $[0,A]$.

Pour étudier la convergence uniforme, on remarque que $F_n(x)$ est une fonction croissante de x. Donc sur l'intervalle $[0,A]$, $\|F_n-0\|_\infty = F_n(A)$. Or $F_n(A)$ converge simplement vers 0 pour tout A positif. Donc $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

(b) Calculer $F_n(0)$ et montrer que F_n admet une limite finie en $+\infty$. Tracer le tableau de variation des fonctions F_n.

On a $F_n(0)=0$. Pour montrer que $F_n(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$, on remarque que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$f_n(x)\le 1 \quad \text{sur} \quad [0,1]$$

et

$$f_n(x)\le \frac{1}{x^{2n-3}} \quad \text{sur} \quad [1,+\infty[.$$

Pour $n\ge 3$, et par comparaison aux intégrales de Riemann, on conclut que f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} F_n(t)$ est finie.

Donc les fonctions F_n sont nulles en 0, croissantes et de limite finie.

(c) En déduire la convergence uniforme de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$.

Pour conclure sur la convergence uniforme, on remarque que sur l'intervalle $[0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
\|F_n-0\|_\infty &= \lim_{x\to+\infty} F_n(x) && (1)\\
&\le \int_0^1 f_n(t)dt + \int_1^\infty f_n(t)dt && (2)\\
&= F_n(1) + \int_1^\infty f_n(t)dt. && (3)
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(1)=0$ car $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur tout intervalle borné de type $[0,A]$.

Puis, sur $[1,+\infty[$, pour $n\ge 3$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty f_n(t)dt &\le \int_1^\infty \tfrac{1}{x^{2n-3}}dt && (4)\\
&= \left[\tfrac{x^{4-2n}}{4-2n}\right]_1^\infty && (5)\\
&= \tfrac{1}{2n-4} && (6)
\end{aligned}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n-4}=0$. Finalement, on voit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|F_n-0\|_\infty=0$

Donc la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$.

Exercice 4

Exercice 5

Etudier la nature des séries de fonctions $\sum f_n$ de terme général défini par:

1. $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$ sur $[0, +\infty[$. (CVN, CVS, CVU).

   Convergence Normale :

   On a $\|f_n\|_\infty \geq |f_n(1)| \sim_{n=+\infty} \frac{1}{2n}$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n\|_\infty$ diverge.

   Convergence simple :

   On fixe $x > 0$. Dans ce cas, la suite $(\ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante, de limite nulle. Ainsi, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$ converge d'après le théorème des séries alternées. De plus, $f_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Donc $\sum f_n$ converge simplement en 0 vers 0.

   Convergence uniforme :

   On remarque que :

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) = \frac{x}{n(1+x)} + O\left(\frac{x^2}{n^2(1+x)^2}\right).$$

   Cette décomposition permet d'étudier la convergence uniforme en séparant la série initiale en deux séries :

$$A/ \quad \sum(-1)^n \frac{x}{n(1+x)}$$

   et en

$$B/ \quad \sum(-1)^n O\left(\frac{x^2}{n^2(1+x)^2}\right).$$

   On remarque alors que le terme général de la série A s'écrit sous la forme $a_n b_n(x)$ avec $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n(x) = (-1)^n \frac{x}{1+x}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante, de limite nulle. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a bien une somme partielle bornée. En effet, on a $0 \leq \frac{x}{1+x} < 1$. Donc

$$|B_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} b_k(x)| = \frac{x}{1+x}|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k| \leq 1.$$

   On peut donc appliquer le théorème d'Abel pour les séries de fonctions et conclure que $\sum(-1)^n \frac{x}{n(1+x)}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

   De plus la série B, converge normalement, car $\frac{x^2}{n^2(1+x)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in [0, +\infty[$. Donc $\|\frac{x^2}{n^2(1+x)^2}\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$.

   Pour conclure, $\sum f_n$ est la somme de deux série qui convergent uniformément, elle converge donc uniformément.

Exercice 6

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite de fonctions définies de la façon suivante:

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n(1+nx^2)} \end{array}$$

1. Etudier la nature de la série $\sum f_n$, $n \in \mathbb{N}^\star$, sur $[0,+\infty[$.

   Calculons $\|f_n\|_\infty$. On a :
$$f_n'(x) = \frac{n(1+nx^2)-2n^2x^2}{n^2(1+nx^2)^2}.$$
   Donc $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow n - n^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{n}}$. De plus $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. Donc
$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n^{3/2}}.$$
   Par comparaison aux séries de Riemann, on voit que $\sum \|f_n\|_\infty$ converge et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement, uniformément et simplement sur $[0,+\infty[$.

2. On note S la fonction somme de la série: $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (a) Montrer que S est de classe C^1 sur tout intervalle $[a,b] \subset]0,+\infty[$, puis sur $]0,+\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée.

   <u>1/ Etude sur $[a,b]$...</u>

   Pour montrer que la somme de la série $\sum f_n$ est C^1 sur tout intervalle $[a,b] \subset]0,+\infty[$, on s'intéresse à la série des dérivées $\sum f_n'$ pour se ramener au théorème 3.19 du polycopié. Si $\sum f_n'$ converge uniformément, alors on pourra conclure que $S' = (\sum_{n=1}^\infty f_n)' = \sum_{n=1}^\infty f_n'$. De plus S' sera continue d'après le théorème 3.16.

   On a
$$f_n'(x) = \frac{1}{(1+nx^2)^2} - \frac{x^2}{(1+nx^2)^2}.$$
   On remarque alors que pour $x \in [a,b]$, on a :
$$\frac{1}{(1+nx^2)^2} \leq \frac{1}{(1+na^2)^2}$$
   et
$$\frac{x^2}{(1+nx^2)^2} \leq \frac{b^2}{(1+na^2)^2}.$$
   Donc $\|f_n'\|_\infty \leq \frac{1}{(1+na^2)^2} + \frac{b^2}{(1+na^2)^2}$ et $\sum \|f_n'\|_\infty$ converge par comparaison aux séries de Riemann. Donc S est dérivable à dérivée continue sur $[a,b]$.

   Le fait que S soit C^1 soit C^1 sur tout intervalle de type $[a,b] \subset]0,+\infty[$ implique que S est C^1 sur $]0,+\infty[$.

(b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

On a $\forall x > 0, \quad f_n(x) \le \frac{x}{n^2 x} = \frac{1}{n^2 x}$. Donc :

$$S(x) \le \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est une valeur finie ($\pi^2/6$). Donc on a bien $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

(c) L'application S est-elle dérivable en 0 ? *Indication : montrer que* $\lim_{x\to 0^+} \frac{S(x)}{x} = +\infty$ *c'est-à-dire:*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \left[|x| < \eta \Rightarrow \frac{S(x)}{x} \ge A \right].$$

Si S' est dérivable en 0 alors,

$$S'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{S(x) - S(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{S(x)}{x}.$$

On utilise alors la somme partielle $S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$. On remarque que $S_{k+1}(x) \ge S_k(x)$. Donc :

$$\frac{S(x)}{x} \ge \frac{S_k(x)}{x} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(1 + nx^2)}$$

En particulier, on voit qu'en prenant $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$, on obtient :

$$\frac{S(x)}{x} \ge \sum_{n=1}^{k} \frac{x}{n(1 + n/k)} \ge \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n}.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on voit donc que $\lim_{x\to 0^+} \frac{S(x)}{x} = +\infty$.