Exercice 24 : 1

Etudier la CV normale de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin x \, e^{-nx}}{n^2}$ sur $\Delta = [0, \pi]$.

Correction : ~~Sur $[0,\pi]$,~~ on a $e^{-nx} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, \pi]$.

De plus, $|\sin x| \leq 1$, $\forall x \in [0, \pi]$.

Donc $\left| \frac{\sin x \, e^{-nx}}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in [0, \pi]$.

Par conséquent, $\left\| \frac{\sin x \, e^{-nx}}{n^2} \right\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$

Et $\sum_{n\geq 1} \left\| \frac{\sin x \, e^{-nx}}{n^2} \right\|_\infty$ converge d'après le théorème de comparaison pour les séries positives.

Par conséquent, $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin x \, e^{-nx}}{n^2}$ CVN, CVU et CVS.

Exercice 25 : Etudier le domaine de continuité, de dérivabilité des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}.$$

Correction : •) On pose $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2}$.

Sur $\mathbb{R}$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)| = \dfrac{1}{n^2}$.

Donc $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge et $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVN.

Elle converge donc aussi uniformément sur $\mathbb{R}$.
Ceci implique que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ tout entier. D'après le corollaire 3.6 du polycopié, f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Pour le domaine de dérivabilité, on s'intéresse à la série $\sum_{n\geq 1} f_n' = \sum_{n\geq 1} -\dfrac{\sin nx}{n}$.

D'après l'exercice 23, sur le théorème d'Abel, on sait que cette série converge sur $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}]2k\pi, (2k+1)\pi[$.

Donc d'après le théorème 3.9, $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\cos kx}{n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k\in\mathbb{N}\}$.

Pour savoir si f est dérivable sur les points $\{2k\pi, k\in\mathbb{N}\}$, il faut avoir recours aux séries de Fourier qui ne font pas partie du cours d'analyse.

En utilisant les séries de Fourier, on peut identifier la fonction f (périodique, de période π) et voir qu'elle n'est pas différentiable en ces points.

a) On pose $g_n(x) = \cancel{\sum_{n\geq 0}^{+\infty}} \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$

Pour $x<0$, $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, donc la série diverge. Pour $x \geq 0$, on peut utiliser la règle d'Abel.

La suite numérique de terme $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ est décroissante, positive, de limite nulle.

On pose $b_n(x) = (-1)^n e^{-nx}$ et $B_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^n e^{-nx}$.

$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée car $\forall x \geq 0$, $\forall n \longmapsto e^{-nx}$ est décroissante et on peut donc montrer que $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour $x>0$. Pour $x=0$, $(B_n(x))$ est bien bornée aussi. avec le théorème des séries alternées.

On peut donc conclure que $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$ en invoquant le théorème d'Abel.

Le domaine de g est donc $[0,+\infty[$. De plus, g est continue sur $[0,+\infty[$ car $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ CVU et g_n est continue $\forall n\in\mathbb{N}$.

Reste à étudier la dérivabilité de g.

On a $g_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n e^{-nx}}{n+1}$

Pour étudier la CVU de $\sum_{n \geq 0} g_n'$, on peut encore utiliser le théorème d'Abel. En posant $a_n = \dfrac{1}{n+1}$

et $b_n(x) = (-1)^{n+1} n e^{-nx}$.

On voit que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante, de limite nulle. De plus, la somme partielle $B_n(x)$ telle que $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} k e^{-kx}$ est bien bornée pour tout $x > 0$. En effet, on remarque d'abord que si $x = 0$,

$B_n(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1} k$ qui diverge lorsque n tend vers l'infini (le terme général diverge).

Si $x > 0$, alors la suite $n \mapsto n e^{-nx}$ est décroissante à partir d'un certain rang, positive et de limite nulle. Donc la série $(B_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée sur tout intervalle du type $[a, b]$ avec $a > 0$, et $b > a$.

D'après la règle d'Abel, on conclut que la série $\sum_{n \geq 0} g_n'$

converge uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < b$.

On conclut en utilisant le théorème 3.9 que

g est dérivable sur tout intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < b$.

Donc elle est dérivable sur $]0, +\infty[$.