Corrections devoir Maison

TD 3, exercice 3 :

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$.

et $\|P\| = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|P^{(m)}(0)|}{m!}$.

1) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

a) On a $\|\lambda P\| = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|(\lambda P)^{(m)}(0)|}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \lambda \frac{|P^{(m)}(0)|}{m!}$

$= \lambda \|P\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

b) Soit $Q = \sum_{k=0}^{M} b_k X^k$ un polynôme. On suppose $M \leq N$ et on rappelle que $P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$.

Ainsi $\|P+Q\| = \sum_{k=0}^{M} |a_k + b_k| + \sum_{k=M+1}^{N} |a_k|$

$$\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{M} |a_k| + \sum_{k=M+1}^{N} |a_k|}_{} + \underbrace{\sum_{k=0}^{M} |b_k|}_{}$$

$$= \|P\| + \|Q\|$$

c) Montrons que $\|P\| = 0 \Rightarrow P = 0$.

On a $\|P\|=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} |a_k| = 0 \Rightarrow a_k = 0, \forall k \in \{1..N\}$

$\Rightarrow P = 0.$

2) $f : P(X) \longmapsto P(X+1)$

a) Montrer que f est linéaire.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et P et Q deux polynômes de degré respectif M et N.

On a
$$f(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q)(X+1)$$
$$= \alpha P(X+1) + Q(X+1)$$
$$= \alpha f(P) + f(Q)$$
, donc f est linéaire.

b) On considère la suite $\left(\frac{X^N}{N}\right)_{N \in \mathbb{N}}$.

f est continue dans $(\mathbb{R}(X), \|\cdot\|)$ si et seulement si elle est continue en 0. C'est-à-dire que pour toute suite $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, telle que $\lim_{k \to +\infty} \|Y_k\| = 0$, $\lim_{k \to +\infty} f(Y_k) = f(0) = 0$.

Ici, on a $\left\| \frac{X^N}{N} \right\| = \sum_{k=0}^{N} |a_k| = \frac{1}{N}$. Donc $\left(\frac{X^N}{N}\right)_{N \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $(\mathbb{R}(X), \|\cdot\|)$. Et $f\left(\frac{X^N}{N}\right) = \frac{(X+1)^N}{N}$

$$= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{X^k}{N}$$

D'où $\left\| f\left(\frac{X^N}{N}\right)\right\| = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$

On voit donc que $\left\| f\left(\frac{X^N}{N}\right)\right\| \underset{N\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$

Donc $\lim_{N\to+\infty} \left\| f\left(\frac{X^N}{N}\right) - f(0)\right\| \neq 0$ et f n'est pas continue en 0.

TD3, exercice 4 :

Soit E l'E.V. des suites convergentes vers 0.

On définit pour $u \in E$, $\| u\| = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i} |u_i|$

1) $\|\cdot\|$ est bien définie sur E. En effet, comme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, i.e. $|u_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$\| u\| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{M}{2^i}$ qui converge.

Les trois axiomes de la normes sont évidents.

2) On considère la suite $u_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ premiers termes}}, 0, 0, \dots)$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$. En effet, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\|U_{n+p} - U_n\| = \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2^n}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \|U_{n+p} - U_n\| = 0$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Sa limite, si elle existe est forcément la suite $U = (1, 1, \dots, 1, 1, \dots)$

En effet, si ce n'était pas le cas, on n'aurait pas

$\lim_{n\to+\infty} \| U - U_n \| = 0$ (d'après l'axiome de séparabilité).

Or la suite $(1, 1, \dots, 1, 1, \dots)$ n'appartient pas à E.

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas sur $(E, \|\cdot\|)$, or elle est de Cauchy. L'espace $(E, \|\cdot\|)$ n'est donc pas un Banach.

TD 4, Exercice 5

$$f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

1) On a $\forall x > 0$, $\quad f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n^2 x}$.

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$. converge par comparaison avec les séries de Riemann. Pour $x=0$, $f_n(x)=0$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(0)$ est elle aussi convergente.

Pour conclure $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2) La manière la plus simple de démontrer la CVU de $\sum_{n\geq 1} f_n$ est de montrer qu'elle converge normalement. C'est-à-dire que $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ CV.

On évalue donc $\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, +\infty[} \left| \dfrac{t}{n(1+nt^2)} \right|$

On a $f_n'(t) = \dfrac{n - n^2 t}{(n(1+nt^2))^2}$. Donc $f_n'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{n}$ sur $[0, +\infty[$

De plus, $f_n(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0$.

Donc le tableau de variations de f est :

x	0		$\sqrt{n}$		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Le maximum est atteint en $\sqrt{n}$. Donc $\|f_n\|_\infty = f_n(\sqrt{n})$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}(1+n^2)}$$

Et $\|f_n\|_\infty \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$. D'après le théorème sur les équivalents pour les séries à termes positifs, on voit donc que $\sum\limits_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ CV.

Donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ CVN, CVU et CVS sur $[0,+\infty[$. (Puisque CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ CVS). Ceci montre que f_n est continue sur $[0,+\infty[$ d'après le théorème 3.16 du polycopié.

Pour étudier la dérivabilité de $S=\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sur $[0,+\infty[$, on étudie la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'$.

On a $f_n'(t) = \dfrac{1-nt}{n(1+nt^2)^2}$.

Donc $|f_n'(t)| = \left|\dfrac{1-nt}{n(1+nt^2)^2}\right| \leq \dfrac{1}{n(1+nt^2)^2} + \dfrac{nt}{n(1+nt^2)^2}$.

Sur l'intervalle $[a,b] \subset]0,+\infty[$,

On a donc $|f_n'(t)| \leqslant \dfrac{1}{n(1+na^2)^2} + \dfrac{b}{n(1+na^2)^2}$

Donc $\|f_n'\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n(1+na^2)^2} + \dfrac{b}{n(1+na^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1+b}{n^3 a^2}$

Donc $\sum_{n\geq 1} \|f_n'\|_\infty$ converge sur le domaine $[a,b]$.

Et on voit que f_n' CVN sur $[a,b] \Rightarrow f_n'$ CVU sur $[a,b]$.

Donc, d'après le théorème 3.19, $S' = \sum_{n\geq 1} f_n'$ ~~est~~ S' est

continue sur $[a,b]$ d'après le théorème 3.16.

Donc S est C^1 sur $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

b) On a pour $x>0$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n+n^2x^2} \leqslant \dfrac{x}{n^2x^2} = \dfrac{1}{n^2 x}$

Donc par le ~~...~~ théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, on a $0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{x} \cdot \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = 0$.

c) S est elle dérivable en 0 ?

S est dérivable si $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{S(x) - S(0)}{x}$ existe.

On a ici $S(0) = 0$, on s'intéresse donc à $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{S(x)}{x}$.

Soit $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$. La suite numérique

$(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour tout $x \geq 0$.

Donc $\frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_n(x)}{x} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0.$

En particulier, on a pour $x = \frac{1}{n}$:

$$\frac{S(1/n)}{(1/n)} \geq \frac{S_n(1/n)}{(1/n)} = n \sum_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{nk(1 + k/n^2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1 + k/n^2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + k^2/n^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n(1/n)}{(1/n)} = +\infty$ (la série $\sum \frac{1}{k+1}$ diverge vers $+\infty$).

Et donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{S(x)}{x} = +\infty$. Par conséquent S n'est pas dérivable en 0.