Correction examen d'analyse I (coquilles probables).

Exercice 1 (Séries entières - 5 points)

Calculer le rayon de convergence et le domaine de convergence simple des séries entières :

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} nx^n$, $x \in \mathbb{R}$.

   On peut utiliser la règle de d'Alembert en posant $a_n = n$. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Donc le rayon de convergence est $R = 1$. De plus, $\sum_{n\in\mathbb{N}} n$ diverge et $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n n$ diverge. Donc le domaine de convergence est $D =]-1, 1[$.

2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n} x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

   D'après la règle de d'Alembert, $R = 1$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique) et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (série alternée). Le domaine de convergence est donc $D =]-1, 1]$.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une démonstration ou un contre-exemple.

1. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum(-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

   C'est vrai. En effet, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n(-z)^n$ convergent. De même, pour $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n(-z)^n$ divergent. On voit donc que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.

2. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum(-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.

   C'est faux. Par exemple, sur $\mathbb{R}$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ a pour domaine de CVS l'intervalle $]-1, 1]$, tandis que la série $\sum \frac{1}{n} x^n$ a pour domaine de CVS l'intervalle $[-1, 1[$

3. Si $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence fini $R > 0$, alors sa somme admet une limite infinie en R^- (i.e. la limite à gauche de R).

   C'est faux. Par exemple, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge au point $x = R = 1$.

Exercice 2 (Séries de fonctions - 7 points)

Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose $f_n(x) = \frac{x\exp(-nx)}{\ln(n)}$ et $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ (sous réserve de convergence).

1. Etudier la convergence simple, normale et uniforme de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

   Convergence simple :

   Pour tout $x > 0$, on a - à partir d'un certain rang - $f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$ d'après les croissances comparées. Donc par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 2} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

   De plus $f_n(0) = 0$, $\forall n \geq 2$. Donc $\sum_{n\geq 2} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

   Convergence normale :

   On calcule $\|f_n\|_\infty$. On a $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. De plus $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \exp(-nx)(1-nx) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n}$. Pour conclure :

   $$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\exp(-1)}{n\ln(n)}.$$

   D'après les résultats sur les séries de Bertrand, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ diverge (comparaison de la série à l'intégrale de $\frac{1}{x\ln(x)}$).

   Convergence uniforme :

   Sur tout intervalle de type $[a, +\infty]$, avec $a > 0$, on peut conclure que $\|f_n\|_\infty \leq \frac{x\exp(-na)}{\ln(n)}$. Donc à partir d'un certain rang, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$. On a donc convergence normale, uniforme et simple sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

   Par contre, on n'a pas encore conclu sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Pour conclure, on peut remarquer que le reste d'ordre n satisfait :

   $$0 \leq \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \leq \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n}^{\infty} x\exp(-kx) = \frac{x\exp(-nx)}{\ln(n)(1-\exp(-x))} \leq \frac{\sup(t/(1-\exp(-t)), t \geq 0)}{\ln(n)}.$$

   Et le membre de droite tend bien vers 0 en $+\infty$. On a donc bien :

   $$\|S - S_n\|_\infty = \|R_n\|_\infty \to_{n\to+\infty} 0$$

   où S_n représente une somme partielle et R_n représente le reste d'ordre n.

2. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On a $f_n'(x) = \frac{1}{\ln(n)}\exp(-nx)(1-nx)$. Par les croissances comparées, on peut donc conclure que sur tout intervalle de type $[a, +\infty[$ avec $a > 0$:

   $$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$$

   à partir d'un certain rang. Ainsi, $\sum_{n\geq 2} f_n'$ converge normalement, uniformément et simplement sur $]0, +\infty[$.

   On peut conclure en utilisant les théorèmes d'interversion dérivée et somme que :

   $$S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n'(x)$$

   sur $]0, +\infty[$. De plus, S' est continue d'après le théorème de continuité pour les séries de fonctions.

   Donc S est C^1 sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

3. Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.

   On doit calculer :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{S(x)-S(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{S(x)}{x}.$$
   On pose $S_n(x) = \sum_{k=2}^n f_k(x)$. Ainsi :
$$\frac{S_n(x)}{x} = \sum_{k=2}^n \frac{\exp(-kx)}{\ln(k)}.$$
   En particulier, pour $x = \frac{1}{n}$ et en remarquant que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a donc :
$$\frac{S(1/n)}{1/n} \geq \frac{S_n(1/n)}{1/n} \geq \sum_{k=2}^n \frac{\exp(-1)}{\ln(k)}.$$
   Or $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^n \frac{\exp(-1)}{\ln(k)} = +\infty$. Donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{S(x)}{x} = +\infty$ et donc S n'est pas dérivable en 0^+.

4. Montrer que $x^k S(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   On note :
$$U(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^k f_n(x) = x^k S(x)$$
   et
$$T(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{k+1} f_n(x) = x^{k+1} S(x).$$
   $T(x)$ tend vers une *valeur finie* sur l'intervalle $[1, +\infty[$ car pour n suffisamment grand :
$$\sup_{x\in[1,+\infty[} |x^{k+1} f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}.$$
   Or $T(x) = xU(x)$. Donc :
$$\lim_{x\to+\infty} U(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{T(x)}{x} = 0.$$

Exercice 3 (Suites de fonctions - 4 points)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On pose $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Donner un exemple de fonction f.

   On peut prendre par exemple :
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1-x & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Montrer que f_n et g_n convergent simplement vers la fonctions nulle.

   Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue et de limite nulle, on sait qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall x > A$, $|f(x)| < \epsilon$. Donc pour tout $x > 0$, il existe n_0, tel que $\forall n \geq n_0$, $f_n(x) = f(nx) < \epsilon$. On conclut que $\forall x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0. De plus $f_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $[0, +\infty[$.

   De même, comme f est continue et nulle en 0, on sait qu'il existe $a > 0$ tel que $\forall x \in [0, a]$, $|g(x)| < \epsilon$. Ainsi, pour tout $x > 0$, il existe n_0, tel que $\forall n \geq n_0$, $g_n(x) = f(x/n) < \epsilon$. On conclut que $\forall x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$ et donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0. De plus $g_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $[0, +\infty[$.

3. Montrer que la convergence n'est pas uniforme.

   On a $\|f_n - 0\|_\infty = \|f\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet :

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f(nx)|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f(x)|_\infty = \|f\|_\infty.$$

   De même, $\|g_n - 0\|_\infty = \|f\|_\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Or par hypothèse, f n'est pas identiquement nulle. Donc $\|f\|_\infty > 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_\infty = \|f\|_\infty > 0.$$

4. Si $\int_0^\infty f(t)dt$ converge, chercher $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty f_n(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty g_n(t)dt$.

   On a :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f_n(t)dt &= \int_0^\infty f(nt)dt \\ &= \int_0^\infty \frac{f(x)}{n}dx \\ &= \frac{1}{n}\int_0^\infty f(x)dx\end{aligned}$$

   Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty f_n(t)dt = 0.$$

   Par un changement de variable similaire, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty g_n(t)dt = +\infty.$$

Exercice 4 (Espaces vectoriels normés - 5 points)

On considère $E = C$, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On rappelle que pour tout $f \in E$, la norme L^1 est définie par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on considère la fonction f_n définie pour tout $x \in [0,1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ -nx + \frac{n}{2} & \text{si } \ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. Dessiner grossièrement la fonction f_n.

   f_n est une fonction continue. Elle vaut 1 au point $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. Elle décroît linéairement vers 0 sur l'intervalle $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2}$, puis est annule jusqu'à $+\infty$.

2. Déterminez la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   La limite simple de cette suite de fonctions est :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0, 1/2[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

   On calcule $\|f_{n+p} - f_n\|_1$:

$$\begin{aligned} \|f_{n+p} - f_n\|_1 &= \int_0^\infty |f_{n+p}(x) - f_n(x)| dx \\ &= \int_0^\infty f_{n+p}(x) - f_n(x) dx. \end{aligned}$$

   Or sur l'intervalle $[1/2 - 1/n, 1/2]$, on remarque que $f_{n+p}(x) - f_n(x) \leq 1$. Donc :

$$\|f_{n+p} - f_n\|_1 \leq \int_{1/2-1/n}^{1/2} 1 dx = 1/n$$

   et $\lim_{n\to+\infty} \|f_{n+p} - f_n\|_1 = 0$, ce qui montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

4. En déduire que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, or elle ne converge pas, car sa limite simple f n'appartient pas à E (l'ensemble des fonctions continues). Donc $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.