INSA Toulouse, STPI, IMACS 2. **mardi 15 novembre 2011**

Examen d'Analyse I - Durée : 1h30 minutes.

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
(Barème donné à titre indicatif.)

Exercice 1 (Série ACV)

Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une suite absolument convergente. Montrez qu'elle converge.

On sait que $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ *converge. On pose* $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ *et* $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. *Ainsi* $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ *et* $u_n = u_n^+ - u_n^-$. *De plus, on a* $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ *et* $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$. *Par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, on sait donc que* $\sum_{n\geq 1} u_n^+$ *et* $\sum_{n\geq 1} u_n^-$ *convergent. Enfin, en utilisant le fait que l'ensemble des séries convergentes est une espace vectoriel, on conclut que* $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} u_n^+ - u_n^-$ *converge.*

Exercice 2 (Nature de séries)

Déterminer la nature des série suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

   La série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$.

   On a $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. *Donc* $u_n = v_n + w_n + x_n$ *avec* $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $w_n = -\frac{1}{n^2}$, $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. *La série* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *CV (série alternée). La série* $\sum_{n\geq 1} w_n$ *CV (série de Riemann). La série* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *CVA donc elle converge (Riemann). La série* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *converge donc, comme somme de trois séries convergentes.*

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{\cos(n\pi)+2}$.

   On a $\cos(n\pi) = (-1)^n$. *Donc en notant* $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\cos(n\pi)+2}$, *on voit que* $u_{2n} = \left(\frac{1}{2n}\right)^3$ *et* $u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$. *On peut conclure que* $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{\cos(n\pi)+2}$ *diverge car la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n+1}$ *diverge.*

Exercice 3 (Limites et nature d'une série)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right)^n$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \neq \beta$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   On a

$$
\begin{aligned}
u_n &= \exp\left(ln\left(\tfrac{n+\alpha}{n+\beta}\right)n\right) && (1)\\
&= \exp\left(ln\left(1+\tfrac{\alpha-\beta}{n+\beta}\right)n\right) && (2)\\
&= \exp\left(\left(\tfrac{\alpha-\beta}{n+\beta}+o\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)n\right). && (3)
\end{aligned}
$$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \exp(\alpha-\beta)$.

2. Déterminer à quelles conditions sur α et β la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

   Elle diverge toujours car le terme général ne tend pas vers 0.

3. Déterminer à quelles conditions la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{n+\alpha}{n+\beta}\right)^{n^2}$ converge.

   D'après le raisonnement précédent, on a

$$\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right)^{n^2} = \exp\left(\frac{n^2(\alpha-\beta)}{n+\beta}+o(n)\right)$$

   et la série converge si et seulement si $\alpha-\beta<0$.

Exercice 4 (Majoration d'un reste)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1. Déterminez la nature de cette série.

   Cette série converge d'après la règle de Cauchy.

2. Montrez que pour $k\geq 10$, on a $u_k \leq \dfrac{1}{10^k}$.

   Il suffit de voir que $\frac{1}{k}\leq\frac{1}{10}$ *pour* $k\geq 10$.

3. En déduire une majoration de $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$

   On a donc $R_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{10^k} = \frac{10^{-(n+1)}}{1-1/10} = \frac{10^{-n}}{9}$.