Examen d'Analyse I - Durée : 45 minutes.

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
(Barème donné à titre indicatif.)

Exercice 1 (15 points. Séries numériques)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs.

   a) Démontrez le résultat suivant : s'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée alors la série $\sum u_n$, $n \in \mathbb{N}$ converge.

   *C*orrection... Il existe $M > 0$ tel que $u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc $u_n \leq \frac{M}{n^\alpha}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. La série $\sum \frac{M}{n^\alpha}$ converge d'après le critère de Riemann. La série $\sum u_n$ converge - elle aussi - d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

   b) Que peut-on dire si on ôte l'hypothèse $u_n \geq 0$?

   *C*orrection... Dans ce cas, on a toujours $n^\alpha |u_n| \leq M$, donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente et $\sum u_n$ converge.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, intégrable sur $[0, +\infty[$, décroissante telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   a) On pose $u_n = f(n)$. Que pouvez-vous dire de la nature de $\sum u_n$, $n \in \mathbb{N}$?

   *C*orrection... La série $\sum u_n$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$, donc elle converge.

   b) Donnez un majorant et un minorant du reste d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$ de cette série.

   *C*orrection... On a (faire un dessin si besoin) :

   $$R_N \leq \int_N^{+\infty} f(t)dt$$

   et

   $$R_N \geq \int_{N+1}^{+\infty} f(t)dt$$

   c) On pose $u_n = \frac{1}{n^3}$. Donnez un majorant du reste d'ordre N de $\sum u_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   *C*orrection... On pose $f(t) = \frac{1}{t^3}$. D'après les questions précédentes, on sait que:

   $$\begin{aligned} |R_N| &\leq \int_N^{+\infty} f(t)dt \\ &\leq \left[-\frac{1}{2n^2}\right]_N^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2N^2} \end{aligned}$$

3. Etudiez la nature des séries suivantes :

a) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$.
*C*orrection... On utilise le critère de Cauchy.

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &\sim_{+\infty} \frac{1}{e} < 1.\end{aligned}$$

Donc $\sum u_n$ converge.

b) $\sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
*C*orrection... La suite $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est positive et décroissante car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et appartient à l'intervalle $[0,1]$ et $t \mapsto \sin(t)$ est croissante sur $[0,1]$ (la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante). De plus, $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Donc d'après le théorème des séries alternées, $\sum u_n$ converge.
Note : d'autres arguments sont valables et seront pris en compte.

c) $\sum \exp(a\exp(n))$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \{-1,1\}$.
*C*orrection... Si $a=1$, u_n n'a pas une limite nulle et $\sum u_n$ diverge.
Si $a=-1$, alors à partir d'un certain rang, $a\exp(n) < -n$. Donc $\sum u_n$ converge par comparaison avec une série géométrique.

d) $\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

Les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \left|O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right|$ convergent (théorème des série alternées et comparaison avec une série de Riemann). Par contre, la série harmonique diverge. Donc $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2 (5 points. Espaces Vectoriels Normés)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

1. Soit $f : E \to F$ une application. Rappelez la définition de l'assertion "f est continue en $x_0 \in E$".

   *C*orrection...

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x \in E, \|x-x_0\|_E \le \eta \Rightarrow \|f(x)-f(x_0)\|_F \le \epsilon$$

2. Soient $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_3$ trois normes sur E. Montrez que si $\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_2$ et si $\|\cdot\|_2$ est équivalente à $\|\cdot\|_3$, alors $\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_3$ (on dit que la relation d'équivalence est transitive).

   *C*orrection... $\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_2$ donc il existe m_1 et M_1 tels que $0 < m_1 \leq M_1$ et :
$$\forall x \in E,\ m_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M_1\|x\|_1.$$
   De même, il existe m_2 et M_2 tels que $0 < m_2 \leq M_2$ et:
$$\forall x \in E,\ m_2\|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq M_2\|x\|_2.$$
   Ainsi, en combinant les inégalités, on trouve :
$$\forall x \in E,\ m_1 m_2\|x\|_1 \leq \|x\|_3 \leq M_1 M_2\|x\|_1.$$
   donc $\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_3$.

Exercice 3 (Hors barême. Séries numériques)

Note : cet exercice stimulera votre réflexion. Il est bien plus compliqué que les précédents, et vous devez avancer plusieurs arguments de natures différentes pour conclure. N'essayez de le traiter que si vous avez complètement répondu aux questions précédentes...

Soit $\sum u_n$, $n \in \mathbb{N}$ une série à termes strictement positifs telle que :
$$\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ \text{avec } c > 1.$$
Montrez que $\sum u_n$ converge.