INSA Toulouse, STPI, IMACS 2. **Vendredi 8 Octobre 2010**

Examen d'Analyse I - Durée : 45 minutes.

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
(Barème donné à titre indicatif.)

Exercice 1 (15 points. Séries numériques)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs.

   a) Démontrez le résultat suivant : s'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée alors la série $\sum u_n$, $n \in \mathbb{N}$ converge.

   b) Que peut-on dire si on ôte l'hypothèse $u_n \geq 0$?

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, intégrable sur $[0, +\infty[$, décroissante telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   a) On pose $u_n = f(n)$. Que pouvez-vous dire de la nature de $\sum u_n$, $n \in \mathbb{N}$?

   b) Donnez un majorant et un minorant du reste d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$ de cette série.

   c) On pose $u_n = \frac{1}{n^3}$. Donnez un majorant du reste d'ordre N de $\sum u_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Etudiez la nature des séries suivantes :

   a) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

   b) $\sum (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   c) $\sum \exp(a\exp(n))$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \{-1, 1\}$.

   d) $\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 (5 points. Espaces Vectoriels Normés)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

1. Soit $f : E \to F$ une application. Rappelez la définition de l'assertion "f est continue en $x_0 \in E$".

2. Soient $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_3$ trois normes sur E. Montrez que si $\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_2$ et si $\|\cdot\|_2$ est équivalente à $\|\cdot\|_3$, alors $\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_3$ (on dit que la relation d'équivalence est transitive).

Exercice 3 (Hors barême. Séries numériques)

Note : cet exercice stimulera votre réflexion. Il est bien plus compliqué que les précédents, et vous devez avancer plusieurs arguments de natures différentes pour conclure. N'essayez de le traiter que si vous avez complètement répondu aux questions précédentes...

Soit $\sum u_n$, $n \in \mathbb{N}$ une série à termes strictement positifs telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \text{ avec } c > 1.$$

Montrez que $\sum u_n$ converge.