Contrôle continu L2PS, 19 Février 2018, 10 h

La durée du contrôle est d'une heure. Les deux exercices sont indépendants. La question marquée (*) est hors-barème et facultative.

1. Soit E un plan sur un corps K, de caractéristique différente de 2 (donc $2 \neq 0$), et $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ une base de E. On considère les deux endomorphismes u et v de E définis dans cette base respectivement par les matrices :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.1 Vérifier que $X(X-1)$ et $(X-1)(X-2)$ sont des polynômes annulateurs de u et v respectivement.

1.2 Les endomorphismes u et v sont-ils diagonalisables? (On ne demande pas ici de rechercher les vecteurs propres).

1.3 Quels sont les polynômes minimaux de u et v?

1.4 Donner la propriété algébrique des endomorphismes u et v qui montre qu'ils possèdent une base commune de vecteurs propres. Citez soigneusement le résultat mis en jeu.

1.5 Expliciter les sous-espaces propres de u et v.

1.6 Expliciter une base de vecteurs propres simultanés de u et v en fonction de la base $\underline{\mathbf{e}}$.

2. Soit E un K-vectoriel de dimension finie m. Soit α une forme linéaire non nulle sur E, H le noyau de α, $\mathbf{e}$ un vecteur non nul de H et $\lambda \in K$.

On désigne par u l'endomorphisme de E (*transvection hyperplane*) défini par :

$$u(x) = \lambda\, x + \alpha(x)\, \mathbf{e}$$

2.1 Vérifier que H est un sous-espace stable de u.

2.2 Montrer que $u - \lambda\, id_E$ est nilpotent. Quel est son indice de nilpotence?

2.3 Expliciter $Sp_K(u)$ et le sous-espace propre associé.

2.4 Soient $\mu \in K$ et v un endomorphisme de E. Montrer que v est irréductible sur E si et seulement si $v - \mu\, id_E$ est irréductible.

2.5 Si $m = 2$, montrer que u est irréductible. Indication: montrer que si V est un sous-espace vectoriel stable de E, et que $V \not\subset H$, alors $e \in V$.

2.6* Si $m = 3$, montrer que u n'est pas irréductible.