Solution CT algèbre 10-05-2017

1. En multipliant par blocs :

• $$MP = \begin{pmatrix} BAI_n - BA & 0 - B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PN = \begin{pmatrix} 0 & I_n \cdot (-B) + 0 \cdot AB \\ 0 & -AB + I_n \cdot AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• on vérifie que $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_n \end{pmatrix}$ donc P est inversible

• donc $N = P^{-1} M P$, d'où $P_N(X) = P_M(X)$

Or $$P_M(X) = \det(XI_{2n} - M) = \begin{vmatrix} XI_n - BA & B \\ 0 & XI_n \end{vmatrix} = X^n P_{BA}(X),$$

$$P_N(X) = \det(XI_{2n} - N) = \begin{vmatrix} XI_n & B \\ 0 & X_n - AB \end{vmatrix} = X^n P_{AB}(X),$$

d'où $P_{AB}(X) = P_{BA}(X)$.

2, a) $q(\lambda x + (1-\lambda) x_0) - 1$

$$= \lambda^2 q(x) + 2\lambda(1-\lambda) Q(x, x_0) + (1-\lambda)^2 q(x_0) - 1$$

$$= \lambda^2 - 1 + (\lambda - 1)\left[-2\lambda Q(x, x_0) + (\lambda-1) q(x_0)\right]$$

$$= (\lambda - 1)\left[\lambda + 1 - 2\lambda Q(x, x_0) + (\lambda - 1) q(x_0)\right]$$

$$= (\lambda - 1)\left[\lambda \left(q(x) - 2Q(x, x_0) + q(x_0)\right) - (q(x_0) - 1)\right].$$

$$= (\lambda - 1)\left(\lambda q(x - x_0) - (q(x_0) - 1)\right).$$

les 2 racines sont 1 et $\dfrac{q(x_0) - 1}{q(x - x_0)}$

(par hypothèse, $q(x - x_0) \neq 0$).

déduction immédiate.

b) $Q(x - x_0, y - y_0) = Q(x - x_0, \lambda_0 (x - x_0))$

$$= \lambda_0 q(x - x_0) = \frac{q(x_0) - 1}{q(x - x_0)} q(x - x_0) = q(x_0) - 1.$$

3. a) $u u^* = u u^2 = u^2 u = u^* u$

donc $\underline{u}$ est normal.

b) Théorème spectral $\Rightarrow$
u diagonalisable dans une b.o.n. $\mathcal{B}$

c) si $Sp(u) \subset \mathbb{R}$, alors en prenant $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ on voit que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$

donc $u = u^*$. Alors $u = u^* = u^2 =$
u est une projection, orthogonale puisque $u = u^*$.

d) $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^*) = \mathrm{Diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^2) = \mathrm{Diag}(\lambda_1^2, \dots \lambda_n^2)$.

Donc $\forall j \quad \overline{\lambda_j} = \lambda_j^2$, donc $|\lambda_j| = |\lambda_j|^2$.

Soit $\lambda_j = 0$, soit $1 = |\lambda_j|$.

Dans ce dernier cas, $\overline{\lambda_j} = \lambda_j^{-1} = \lambda_j^2$,

donc $\lambda_j^3 = 1$, cqfd.

e) $u^3 = u u^*$, donc $(u^3)^* = u^{**} u^* = u u^* = u^3$

D'autre part $(u^3)^* = (u^*)^3 = (u^2)^3 = u^6$.

Donc $(u^3)^2 = u^3$ et $(u^3)^* = u^3$: on a une projection orthogonale.

__autre solution__ $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^3) = \mathrm{Diag}(\lambda_1^3, \dots \lambda_n^3)$

et $\lambda_j^3 = 0$ ou 1.

Comme la base $\mathcal{B}$ est une b.o.n. on a une projection orthogonale.

g) $\mathcal{M}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient

ou $\mathcal{M}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et beaucoup d'autres ...

f) $\mathcal{M}(v^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^t\mathcal{M}(v).$

$\det v = 1$, donc v est une transformation orthogonale directe donc une rotation.

$\mathrm{Ker}\,(v - id) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \{x_1 = x_2 = x_3\}$

$= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\longrightarrow$ axe

angle $\pm \frac{2\pi}{3}$ selon l'orientation car $v^3 = id$.