Contrôle terminal Analyse Complexe 1

6-11-2017

Solution

1\. a) Soit f une fonction analytique sur $D(a,r)$ telle que $f(a)=0$. Alors soit $\exists\, r_1 \leq r$ t.q. pour tout $z \in D(a,r_1)$, $z \neq a$, alors $f(z) \neq 0$, soit $\exists\, r_2 \leq r$ t.q. pour tout $z \in D(a,r_2)$, $f(z)=0$.

b) Clairement $f_0(z)=z$ est analytique (sur $\mathbb{C}$) et vérifie $f_0(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nous allons montrer que c'est la seule : soit $g(z)=f(z)-z$, où f vérifie les conditions données.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$.
g est analytique sur $D(0,1)$, comme différences de fonctions analytiques. Par continuité en 0, $g(0) = \lim_{n\to\infty} g(\frac{1}{n}) = 0$.
Donc 0 est un zéro non isolé de g (Donc $g \equiv 0$ sur un disque $D(0,r_2)$ et donc tous les coefficients de son développement en série entière en 0 sont nuls).
Par la forme globale du thm des zéros isolés, comme $D(0,1)$ est connexe, $g \equiv 0$ sur $D(0,1)$.
Donc $f_0(z)=z$ est la seule fonction qui convienne.

c) Ici $f_0(z)=z$ et $f_1(z)=-z$ satisfont la condition. Considérons $g(z) = f(z)^2 - z^2$.
Alors $g \in \mathcal{A}(D(0,1))$ et $g(\frac{1}{n})=0$, $\forall n \geq 2$.
À nouveau 0 est un zéro non isolé de g, donc $g \equiv 0$ sur $D(0,1)$ par le T-Z-I global.

Supposons que f ~~vérifie~~ vérifie la condition et que $\exists z$ tq $f(z) \neq z$ et $\exists z'$ tq $f(z') \neq -z'$.
Alors $f(z) - z$ et $f(z) + z$ n'ont que des zéros isolés. En particulier, $\mathrm{Card}(\{f(z)=z\} \cap \overline{D}(0,\frac{1}{2}))$ est fini et $\mathrm{Card}(\{f(z)=-z\} \cap \overline{D}(0,\frac{1}{2}))$ est fini, car ce sont des ensembles discrets contenus dans un compact.
Mais ~~alors~~ nous venons de montrer que
$\{f(z)=z\} \cup \{f(z)=-z\} \supset D(0,1) \supset \overline{D}(0,\frac{1}{2})$,
qui est un ensemble infini : contradiction !

Il n'y a donc que 2 solutions, $f(z)=z$ ou $f(z)=-z$

d) Par continuité, $f(0)^2 = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})^2 = 0$,
Donc $f(0)=0$.
Donc $f(z) = \sum_{k\geq 1} a_k z^k$, donc $|f(z)| \leq C|z|$
pour $|z| \leq \frac{1}{2}$ par exemple.
Mais alors $|f(\frac{1}{n})|^2 \leq \frac{C^2}{n^2} \neq \frac{1}{n}$ pour n assez grand : contradiction.

2. Si il existe $a \in \Omega$ tel que $f(a)=0$, on a fini

Sinon, $\frac{1}{f} \in A(\Omega)$, et comme $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \overline{\Omega}$

(puisque $|f(z)|=1$ si $z \in \partial\Omega$), $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Le principe du module maximum (corollaire)

montre que $\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq \max_{\partial\Omega} \left|\frac{1}{f}\right| = 1$, $\forall z \in \Omega$.

Le même corollaire appliqué à f montre que

$|f(z)| \leq \max_{\partial\Omega} |f| = 1$. Donc $\forall z \in \Omega$, $|f(z)|=1$.

Donc tout point de Ω est maximum local

de $|f|$: donc f est constante sur Ω,

car Ω est connexe.

3* a) Si f est un polynôme non constant :

Théorème fondamental de l'algèbre :

~~[illegible]~~ $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tq $f(z)=0$.

Or $z \longmapsto f(z)-w$ est aussi un polynôme

non constant, donc $\exists z_w \in \mathbb{C}$ tq $f(z_w)-w=0$:

donc $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Si $f(z)=e^z$: on sait (cours) que $\forall w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$\exists z \in \mathbb{C}$ ($z = \log|w| + i\arg(w)$) tel que $e^z = w$.

Donc $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

* erratum : toutes les f sont supposées non constantes

b) Si A n'est pas dense dans $\mathbb{C}$, $\exists\, z_0$ tel que

$$\delta = \inf \{ |z_0 - a| : z \in A \} > 0,$$

alors $\forall\, a \in A$, $|z_0 - a| \geq \delta$ donc $D(z_0, \delta) \cap A = \emptyset$.

c) Supposons $f(\mathbb{C})$ non dense, $\forall z \in \mathbb{C}$: $f(z) \in A := f(\mathbb{C})$

qui n'est pas dense dans $\mathbb{C}$, donc $f(\mathbb{C}) \cap D(z_0, r) = \emptyset$,

autrement dit $|f(z) - z_0| \geq r > 0$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

Donc $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - z_0}$ est bien défini et

$g \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$,

et $|g(z)| \leq \dfrac{1}{r} < \infty \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$.

D'après le théorème de Liouville, $g \equiv C$, constante

Donc $C = \dfrac{1}{f(z) - z_0} \Rightarrow f(z) = z_0 + \dfrac{1}{C}$, constante.

Contradiction.

4. a) Les racines cubiques de 1 sont $\left\{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right\}$.

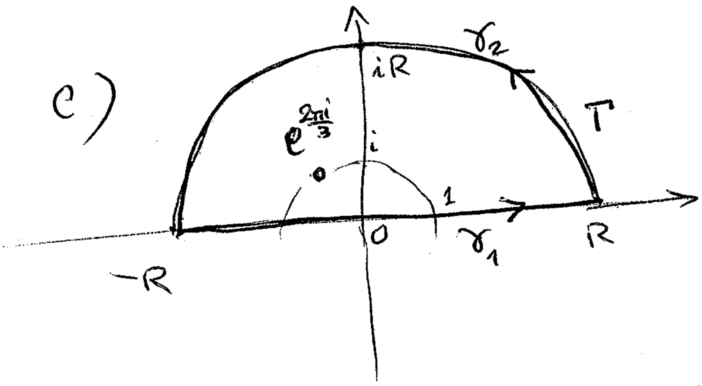
Les racines de z^2+z+1 sont contenues dans celles-là, et 1 n'est pas racine ($1^2+1+1 \neq 0$) donc ce sont $\left\{e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right\} = \left\{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

b) ~~Nous avons~~ f_0 admet un pôle simple en $e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

$$f_0(z) = \frac{\frac{1}{z-e^{-\frac{2\pi i}{3}}}}{z-e^{\frac{2\pi i}{3}}}$$ et le numérateur est $\neq 0$, analytique ~~holomorphe~~ au voisinage de $e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Donc $$\mathrm{Res}\left(f_0, e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = \frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{-\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{1}{i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$
$$= \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{-i}{\sqrt{3}}.$$

c)



Un seul pôle de f_0 est contenu dans $\hat{\Gamma}$, $e^{\frac{2\pi i}{3}}$

Γ est une courbe de Jordan dans $\mathbb{C}$, ouvert sur lequel f_0 est analytique sauf pour un nombre fini $(=2)$ de pôles.

La ~~Théorème~~ Formule des Résidus implique :

$$\int_\Gamma f_0(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(f_0, e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = \frac{2\pi i}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

d) $$\int_{\gamma_2} f_0(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{1}{R^2e^{2i\theta}+Re^{i\theta}+1}\, iRe^{i\theta}\,d\theta.$$

Or $$\left|\frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+Re^{i\theta}+1}\right| \leq \frac{R}{R^2-R-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,$$

donc la fonction à intégrer tend uniformément ~~[illegible]~~ sur $[0,\pi]$ vers 0 quand $R \to \infty$, donc

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f_0(z)\,dz = 0.$$

D'autre part, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ est absolument convergente

$\left(\text{car } \frac{1}{x^2+x+1} \underset{|x|\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \right)$ donc $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f_0(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

Donc $\underbrace{\int_{\Gamma} f_0(z)\,dz}_{\text{indépendante de } R.} = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f_0(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f_0(z)\,dz + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f_0(z)\,dz$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

e) Ici g admet un pôle double en $e^{\frac{2\pi i}{3}}$

et $g(z) = \dfrac{\dfrac{1}{\left(z - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^2}}{\left(z - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^2}$.

Pour trouver le résidu, on doit calculer la dérivée première du numérateur au point concerné.

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\left(z - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^2} = \frac{-2}{\left(z - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^3} ;$$

pour $z = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, on trouve $\dfrac{-2}{\left(e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^3} = \dfrac{-2}{(i\sqrt{3})^3} = \dfrac{-2i}{3\sqrt{3}}$.

f) Par la formule des résidus,

$$\int_\Gamma g(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(g, e^{\frac{2\pi i}{3}}) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

D'autre part, $\left|\int_{\gamma_2} g(z)\,dz\right| \leq \operatorname{long}(\gamma_2) \max_{\gamma_2} |g| \leq \frac{\pi R}{(R^2-R-1)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$

(on peut aussi écrire l'intégrale sur $[0;\pi]$ comme dans la question d)).

L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$ est absolument convergente

car $\frac{1}{(x^2+x+1)^2} \underset{|x|\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^4}$.

Finalement $\int_\Gamma g(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} g(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

donc $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

g) Pour $\xi < 0$, et $z \in \gamma_2([0,\pi])$,

alors $\operatorname{Im} z \geq 0$, donc $\operatorname{Re}(-2\pi i z \xi) \leq 0$,

donc $|e^{-2\pi i z \xi}| \leq 1$ et $|f_\xi(z)| \leq \frac{1}{|z^2+z+1|}$.

On peut donc faire le même raisonnement qu'à la question d) pour montrer que $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f_\xi(z)\,dz = 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $|e^{-2\pi i x \xi}| = 1$, donc à nouveau $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,dx$ est absolument convergente.

f_ξ admet un seul pôle dans $\hat{\Gamma}$, au point $e^{\frac{2\pi i}{3}}$, qui est un pôle simple. Donc

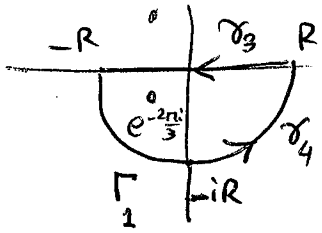
$$\operatorname{Res}\left(f_\xi, e^{2\pi i/3}\right) = \frac{e^{-2\pi i \xi e^{\frac{2\pi i}{3}}}}{i\sqrt{3}}$$

Calcul de $-2\pi i \xi e^{\frac{2\pi i}{3}} = -2\pi i \xi \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = +\pi i \xi + \pi \xi \sqrt{3}$.

Finalement $$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\, dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \exp\left(+\pi i \xi + \pi \xi \sqrt{3}\right).$$

h). Pour $\xi > 0$ et $\operatorname{Im} z \leq 0$, alors $\operatorname{Re}\left(-2\pi i \xi z\right) \leq 0$.

Ceci permet de faire la même majoration qu'à la question précédente, mais sur γ_4.



Donc $$\int_{\Gamma_1} f_\xi(z)\, dz = \lim_{R\to\infty} \int_R^{-R} f_\xi(x)\, dx + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_4} f_\xi(z)\, dz$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\, dx.$$

D'autre part $$\int_{\Gamma_1} f_\xi(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f_\xi, e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right).$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-2\pi i \xi e^{-\frac{2\pi i}{3}}}}{-i\sqrt{3}} = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \exp\left(-2\pi i \xi \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{-2\pi}{\sqrt{3}} \exp\left(\pi i \xi - \pi \xi \sqrt{3}\right).$$

Donc pour $\xi > 0$, $$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\, dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \exp\left(\pi i \xi - \pi \xi \sqrt{3}\right).$$

Comme $-|\xi| = -\xi$ pour $\xi > 0$ et $= \xi$ pour $\xi < 0$, on trouve

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\, dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \exp\left(\pi i \xi - \pi |\xi| \sqrt{3}\right), \ \forall \xi \in \mathbb{R}$$

(pour $\xi = 0$ c'est la quest^{n} d).

i) Le théorème de Plancherel dit que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Or $f(x)^2 = g(x)$, donc l'intégrale en question est $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ d'après f).

D'autre part, $|\hat{f}(\xi)|^2 = \frac{4\pi^2}{3} e^{-2\pi|\xi|\sqrt{3}}$.

Or

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|\xi|\sqrt{3}} d\xi = 2\int_{0}^{\infty} e^{-2\pi\xi\sqrt{3}} d\xi$$

$$= 2\cdot\left(\frac{-1}{2\pi\sqrt{3}}\right)\left[0 - e^{-2\pi\times 0\times\sqrt{3}}\right] = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}.$$

Finalement $\int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$, cqfd.