Contrôle continu   Analyse complexe 1   2-10-2017

Solution

1. a) f est continue, donc $f(0) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})$
$= \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0.$

b) Il suffit de prendre $n > \frac{1}{r'}$, $f(\frac{1}{n}) = e^{-n} \neq 0$
et $\frac{1}{n} \in D(0,r')$.

c) Si on avait $a_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$,
alors il existe r' tq. $f(z) = 0$ $\forall z \in D(0,r')$
ce qui est faux d'après b).

d) $f(z) = \sum_{k\geq k_0} a_k z^k = a_{k_0} z^{k_0} \sum_{k\geq k_0} \frac{a_k}{a_{k_0}} z^{k-k_0}$,
puisque $a_{k_0} \neq 0$.

$$\frac{f(z)}{a_{k_0} z^{k_0}} = 1 + \sum_{k\geq k_0+1} \frac{a_k}{a_{k_0}} z^{k-k_0}$$

C'est une série uniformément convergente sur $\bar{D}(0,r')$
pour r' assez petit, donc $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{a_{k_0} z^{k_0}} = 1 + \sum 0 = 1.$

e) En particulier on peut appliquer le résultat de d) à $z = \frac{1}{n} \to 0$
donc $1 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n})}{a_{k_0}(\frac{1}{n})^{k_0}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{k_0}}{a_{k_0}} e^{-n} = 0$:
Contradiction !

2. a) Puisque $\mathrm{Re}\, g(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$,
$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Re}\, g)(z) = 0$ donc $\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Im}\, g)(z) = 0$.
De même $\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Im}\, g) = -\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Re}\, g) = 0.$
Donc la fonction $\mathrm{Im}\, g$ est constante.
Mais alors $g = \mathrm{Re}\, g + i\, \mathrm{Im}\, g = i\, \mathrm{Im}\, g$
est constante.

2 b) $\operatorname{Re} g(z) = \frac{1}{2}\left(g(z) + \overline{g(z)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{f(z)-1}{f(z)+1} + \overline{\left(\frac{f(z)-1}{f(z)+1}\right)}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{f(z)-1}{f(z)+1} + \frac{\frac{1}{f(z)}-1}{\frac{1}{f(z)}+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{f(z)-1}{f(z)+1} + \frac{1-f(z)}{1+f(z)}\right)$

$= 0$.

c) La fonction $g = \frac{f-1}{f+1}$ est constante ~~[illegible]~~ d'après a, puisque d'après b, $\operatorname{Re} g = 0$ (car f $\mathbb{C}$-dérivable $\Rightarrow g$ $\mathbb{C}$-dérivable).

Or $g(z)(f(z)+1) = f(z) - 1$,

donc $f(z)(g(z)-1) = -1 - g(z)$

Or de plus $g(z) \neq 1, \forall z$, donc $f(z) = \frac{1+g(z)}{1-g(z)}$ est constante aussi.

3) • Avec la formule de la moyenne :

$\forall R_1 > 0,\ f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + R_1 e^{i\theta})\, d\theta$

Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists R > 0$ tq $|z| \geq R$ $\Rightarrow |f(z)| \leq \varepsilon$.

Prenons $R_1 > |a| + R$,

alors $|a + R_1 e^{i\theta}| \geq |R_1 e^{i\theta}| - |a| \geq R$.

Donc $\left| \int_0^{2\pi} f(a + R_1 e^{i\theta})\, d\theta \right| \leq 2\pi \cdot \varepsilon$,

et $|f(a)| \leq \varepsilon$. Vrai $\forall \varepsilon \Rightarrow f(a) = 0$.

• Avec les inégalités de Cauchy : $\forall k \geq 0$,

$|f^{(k)}(0)| \leq \frac{1}{k!} \frac{1}{2\pi} \int_{C(0,R_1)} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \right| |d\zeta| \leq \frac{1}{k!} \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi R_1 \varepsilon}{R_1^{k+1}}$

$\leq \frac{\varepsilon}{k!\, R_1^k}$ si $R_1 \geq R$ choisi comme ci-dessus.

Donc $f^{(k)}(0) = 0, \forall k$. Donc $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = 0$ dans un voisinage de 0, donc dans $\mathbb{C}$ tout entier (thm des zéros isolés)