Analyse Complexe 1 2020-21 2e Session

Solution du Contrôle Terminal

1. Une fonction $\mathbb{C}$ dérivable vérifie

$$\frac{\partial}{\partial y} f = i \frac{\partial f}{\partial x}$$

Or $\frac{\partial}{\partial y}(\overline{f}) = \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f) = \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Re} f) - i \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Im} f)$

$$= \overline{\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Re} f) + i \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Im} f)} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}.$$

De même, $\frac{\partial}{\partial x}(\overline{f}) = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}$.

Donc f $\mathbb{C}$-dérivable $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$

$\overline{f}$ $\mathbb{C}$-dérivable $\Rightarrow$ $\frac{\partial (\overline{f})}{\partial y} = i \frac{\partial (\overline{f})}{\partial x}$

$$\Longleftrightarrow \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} = i \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}$$

En prenant le conjugué des deux membres :

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial f}{\partial x}$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en tout point,

et donc $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en tout point,

donc f est constante (car définie sur un disque, qui est connexe).

2. a) Si $f(z)^2 = z$, on trouve en dérivant

$$2 f'(z) f(z) = 1.$$

D'autre part, pour $z = 0$, $f(0)^2 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

Donc $2 f'(z) \cdot 0 = 1$: absurde !

2 (suite)

b) $$g\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

D'autre part g est $\mathbb{C}$-dérivable (produit et somme de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables) sur $D(0,1)$ donc 0 est un zéro non-isolé de g puisque $\frac{1}{n} \to 0$, donc $g = 0$.

Alors $f(z)^2 = z$: impossible d'après a).

3. f est continue, donc $|f|$ est borné sur tout fermé borné, par exemple sur $\overline{D}(0,R)$ (pour tout $R>0$).

$\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 1 \implies \exists R_1$ tq $|f(z) - 1| \leq 1$ dès que $|z| \geq R_1$.

En particulier, pour tout z,
$$|f(z)| \leq \max_{\overline{D}(0,R_1)} |f| + 2 =: M.$$

f est $\mathbb{C}$-dérivable sur tout $\mathbb{C}$, bornée donc d'après le théorème de Liouville, f est constante. Mais $f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 1$, donc la seule constante possible est 1.

4. a) En 0 la fonction est bornée, pas de problème.

A l'infini : $\frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}}$ et l'intégrande est positive.

Or $3/2 > 1$ donc $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge,

donc $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$ converge

b) $\mathrm{Log}^{(\text{sur } \Omega)}$ et exp sont $\mathbb{C}$-dérivables,

donc $z \longmapsto z^{1/2}$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.

z^2+1 est un polynôme, donc $\mathbb{C}$ dérivable.

Donc f est $\mathbb{C}$ dérivable ~~partout où~~ $\forall z \in \Omega$ t.q. $z^2+1 \neq 0$.

Or $z^2+1 = 0 \iff z \in \{+i, -i\}$.

$-i \notin \Omega$, donc la seule singularité de f est en i.

D'autre part $f(z) = \dfrac{\left(\frac{z^{1/2}}{z+i}\right)}{z-i}$ puisque $z^2+1 = (z+i)(z-i)$

et $\dfrac{z^{1/2}}{z+i}$ est analytique au voisinage de i,

donc le point i est un pôle (d'ordre 1).

c) $\mathrm{Res}(f;i) = \dfrac{i^{1/2}}{i+i} = \dfrac{i^{1/2}}{2i}$.

Avec le choix d'argument qu'on a fait,

$i = \exp\left(\frac{\pi}{2} i\right)$, $i^{1/2} = \exp\left(\frac{\pi}{4} i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\mathrm{Res}(f;i) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

d) Le seul pôle de f entouré par $\Gamma_{\varepsilon,R}$ est i (car $\varepsilon < 1 = |i| < R$).

Donc $$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f;i)$$
$$= 2\pi i \frac{1}{2i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i).$$

e) $$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \text{longueur}(\gamma_2) \sup_{0\leq t\leq \pi} \left|f(\gamma_2(t))\right|.$$

mais $|\gamma_2(t)| = R$,

donc $$|f(\gamma_2(t))| \leq \frac{R^{1/2}}{R^2-1}$$

$\text{longueur}(\gamma_2) = \pi R$,

donc $$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R^{3/2}}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Finalement $$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0.$$

f) $$\left|\int_{\gamma_4} f(z)\,dz\right| \leq \text{longueur}(\gamma_4) \sup_{0\leq t\leq \pi} \left|f(\gamma_4(t))\right|.$$

Ici $|\gamma_4(t)| = \varepsilon$, donc

$$|f(\gamma_4(t))| \leq \frac{\varepsilon^{1/2}}{1-\varepsilon^2}$$

et $\text{longueur}(\gamma_4) = \pi\varepsilon$,

donc $$\left|\int_{\gamma_4} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi\varepsilon^{3/2}}{1-\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

g) $$z = -u = u\,e^{i\pi} \quad \left(\text{on a bien } -\tfrac{\pi}{2} < \pi < \tfrac{3\pi}{2}\right)$$

donc $$z^{1/2} = \sqrt{u}\,e^{i\pi/2} = i\sqrt{u}.$$

d'où (comme $u=-t$ pour $-R\leq t\leq -\varepsilon$)

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{i\sqrt{-t}}{t^2+1}\,dt$$

posons $u = -t$, $du = -dt$

$$= -\int_R^{\varepsilon} \frac{i\sqrt{u}}{u^2+1}\,du = i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sqrt{u}}{u^2+1}\,du.$$

$$= i\int_{\varepsilon}^{R} f(t)\,dt$$

(on peut changer le nom de la variable)

h) Comme l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{t^2+1}\,dt$ converge,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{t^2+1}\,dt,$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = i\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{t^2+1}\,dt,$$

et $$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,0}} f(z)\,dz = 0+0+(1+i)\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{t^2+1}\,dt.$$

(mais cette valeur est aussi, d'après la question d, la constante $\pi\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

En divisant par $(1+i)$ on trouve $\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{t^2+1}\,dt = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>Remarque</u> on peut aussi calculer cette intégrale en posant $x=u^2$, $dx = 2u\,du$, donc

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{2u^2}{1+u^4}\,du$$

$$1+u^4 = (u^2 - u\sqrt{2}+1)(u^2+u\sqrt{2}+1)$$

(se trouve avec $u^4+1 = \left(u-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(u-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\left(u-\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right)\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)$)

Il faut décomposer en éléments simples et intégrer chaque terme ... c'est plutôt plus dur que les résidus!