Contrôle terminal L2 PS S4 Algèbre 7 Mai 2019

Solution

I)

1. $(u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^* = u^* \circ u$, donc $u^* \circ u$ est auto adjoint, donc diagonalisable dans une base orthonormée (thm. de l'axe principal)

2. $(u(x) \mid u(x)) = \| u(x) \|^2 \geq 0$

$(u(x) \mid u(x)) = (x \mid u^* \circ u(x))$.

Si x est un vecteur propre pour la v. p. λ,

$= (x \mid \lambda x) = \lambda \|x\|^2$. Or $x \neq 0$ (car propre) donc $\|x\|^2 > 0$ et $\lambda = \dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \geq 0$.

Pour tout $x \in E_\lambda \setminus \{0\}$ le calcul ci dessus montre que $\dfrac{\| u(x) \|}{\|x\|} = \sqrt{\lambda}$.

3. $u = (u^*)^*$, donc on applique les questions 1. et 2. à $u^* \in \mathcal{L}(F, E)$.

4. Soit $y = u(x)$, où $x \in E_\lambda$.

$u \circ u^*(y) = u \circ u^* \circ u(x) = u(\lambda x)$ car $x \in E_\lambda$

$= \lambda u(x) = \lambda y$, donc $y \in F_\lambda$.

5. $u \circ u^*(u(x)) = \lambda_i x$ d'après la question précédente,

$\lambda_i \neq 0$, $x \neq 0$ donc $\lambda_i x \neq 0$, donc $u(x) \neq 0$ (car $u \circ u^*(0) = 0$).

Donc $u(x) \in F_{\lambda_i} \setminus \{0\}$: c'est un vecteur propre de $u \circ u^*$, donc λ_i est valeur propre de $u \circ u^*$.

D'autre part $u|_{E_{\lambda_i}}$ est injective
(car $\mathrm{Ker}(u|_{E_{\lambda_i}}) = \{0\}$), donc $\dim u(E_{\lambda_i}) = \dim E_{\lambda_i}$

Or $u(E_{\lambda_i}) \subset F_{\lambda_i}$, donc $\dim F_{\lambda_i} \geq \dim u(E_{\lambda_i}) = \dim E_{\lambda_i}$.

6. En appliquant la question 5 à $u^* \in \mathcal{L}(F,E)$
on trouve de même $\{\mu_1 \dots \mu_k\} \subset \{\lambda_1, \dots \lambda_k\}$
donc les 2 ensembles sont égaux, et
$\dim E_{\lambda_i} \geq \dim F_{\lambda_i}$; donc $\dim E_{\lambda_i} = \dim F_{\lambda_i}$, $\forall i$.

Comme $u|_{E_{\lambda_i}}$ est injective, elle est bijective, cqfd.

II) 1. $\det M_\alpha = \begin{vmatrix} 1+2\alpha & \alpha & \alpha \\ 1+2\alpha & 1 & \alpha \\ 1+2\alpha & \alpha & 1 \end{vmatrix} = (1+2\alpha) \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix}$

$(C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3)$

$= (1+2\alpha) \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{matrix} = (1+2\alpha)(1-\alpha)^2.$

Donc pour $\alpha \notin \{-\frac{1}{2}, 1\}$, $\mathrm{rg}\, M_\alpha = 3$, car $\det M_\alpha \neq 0$.

Cas $\alpha = -\frac{1}{2}$ $M_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. On sait $\mathrm{rg}\, M_{-\frac{1}{2}} < 3$.

Or $\det \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq 0$, donc $\mathrm{rg}\, M_{-\frac{1}{2}} \geq 2$, donc
$\mathrm{rg}\, M_{-\frac{1}{2}} = 2$.

Cas $\alpha = 1$ $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $M_1 \neq 0$, donc $\mathrm{rg} M_1 > 0$
et les 3 colonnes sont multiples de la 1ère, donc $\mathrm{rg} M_1 = 1$.

2. $q_\alpha(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)$

$= \left(x_1+\alpha(x_2+x_3)\right)^2 - \alpha^2(x_2+x_3)^2 + x_2^2+x_3^2+2\alpha x_2x_3$

$= \left(x_1+\alpha(x_2+x_3)\right)^2 + (1-\alpha^2)x_2^2 + (1-\alpha^2)x_3^2 + (2\alpha-2\alpha^2)x_2x_3$

$= \left(x_1+\alpha(x_2+x_3)\right)^2 + (1-\alpha)\left[(1+\alpha)x_2^2+2\alpha x_2x_3\right] + (1-\alpha^2)x_3^2$

pour $\alpha \neq -1$:

$= \left(x_1+\alpha(x_2+x_3)\right)^2 + (1-\alpha)(1+\alpha)\left(x_2+\frac{\alpha}{1+\alpha}x_3\right)^2$

$\quad - \frac{(1-\alpha)\alpha^2}{1+\alpha}x_3^2 + (1-\alpha^2)x_3^2$

$= \left(x_1+\alpha(x_2+x_3)\right)^2 + (1-\alpha^2)\left(x_2+\frac{\alpha}{1+\alpha}x_3\right)^2 + \frac{\overbrace{\left((1+\alpha)^2-\alpha^2\right)}^{2\alpha+1}(1-\alpha)}{1+\alpha}x_3^2 \quad (*)$

pour $\alpha = -1$

$= \left(x_1-(x_2+x_3)\right)^2 - 4x_2x_3 = \left(x_1-(x_2+x_3)\right)^2 - (x_2+x_3)^2 + (x_2-x_3)^2.$

Les valeurs particulières de α sont -1, $-\frac{1}{2}$, 1

(car les coefs dans $(*)$ sont $(1-\alpha^2)$ et $\frac{(1-\alpha)(2\alpha+1)}{1+\alpha}$, qui s'annulent pour certaines de ces valeurs ...)

Pour $\alpha \in]-\infty,-1[$: $1-\alpha^2<0$; $\frac{(2\alpha+1)(1-\alpha)}{1+\alpha}>0$;
la signature de q_α est $(2,1,0)$.

Pour $\alpha=-1$: la signature de q_α est $(2,1,0)$.

Pour $\alpha \in]-1,-\frac{1}{2}[$: $1-\alpha^2>0$, $\frac{(2\alpha+1)(1-\alpha)}{1+\alpha}<0$;
la signature de q_α est $(2,1,0)$.

Pour $\alpha=-\frac{1}{2}$: $1-\alpha^2>0$, $\frac{(2\alpha+1)(1-\alpha)}{1+\alpha}=0$:
la signature de q_α est $(1,1,1)$ (q_α est dégénérée, de rang 2).

Pour $\alpha \in]-\frac{1}{2},1[$: $1-\alpha^2>0$, $\frac{(2\alpha+1)(1-\alpha)}{1+\alpha}>0$:
la signature de q_α est $(3,0,0)$.

Pour $\alpha = 1$: $1-\alpha^2 = 0$, $\dfrac{(2\alpha+1)(1-\alpha)}{1+\alpha} = 0$;

la signature de q_α est $(1,0,2)$ (q_α est dégénérée, de rang 1).

Pour $\alpha > 1$: $1-\alpha^2 < 0$, $\dfrac{(2\alpha+1)(1-\alpha)}{1+\alpha} < 0$;

la signature de q_α est $(1,2,0)$.

3. Calculons le polynôme caractéristique de M_α :

$$\det\left(XI - M_\alpha\right) = \begin{vmatrix} X-1 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & X-1 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & X-1 \end{vmatrix}$$

on utilise les mêmes opérations de lignes et de colonnes qu'à la question 1 :

$$= \begin{vmatrix} X-(1+2\alpha) & -\alpha & -\alpha \\ X-(1+2\alpha) & X-1 & -\alpha \\ X-(1+2\alpha) & -\alpha & X-1 \end{vmatrix} = \left(X-(1+2\alpha)\right)\begin{vmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ 1 & X-1 & -\alpha \\ 1 & -\alpha & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(X-(1+2\alpha)\right)\begin{vmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & X-1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & X-1+\alpha \end{vmatrix} = \left(X-(1+2\alpha)\right)\left(X-(1-\alpha)\right)^2.$$

Donc $1+2\alpha$ est valeur propre simple,

$1-\alpha$ est valeur propre double si $1+2\alpha \neq 1-\alpha$, càd si $\alpha \neq 0$.

$M_\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2\alpha\\1+2\alpha\\1+2\alpha\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est propre pour $1+2\alpha$,

et comme on sait que le s.e.v. propre associé est de dimension 1,

$E_{1+2\alpha} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ (selon votre notation préférée)

Résolvons $M_\alpha x = (1-\alpha)x$: $\begin{pmatrix}1 & \alpha & \alpha\\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = (1-\alpha)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix}-\alpha & -\alpha & -\alpha\\ -\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

On voit que $E_{1-\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$, si $\alpha \neq 0$

si $\alpha = 0$; alors $1 - \alpha = 1 + 2\alpha = 1$,

et $M_0 = I$ donc $E_1 = \mathbb{R}^3$.

Autre méthode :

On utilise le théorème de l'axe principal.

On constate que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre pour $\lambda = 1 + 2\alpha$.

Donc $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle^\perp$ est un sous espace stable.

On calcule $M_\alpha x$ dans le cas où

$$x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle^\perp = \{ x : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$$

donc $x_1 = -(x_2 + x_3)$, etc.

$$M_\alpha x = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha(x_2 + x_3) \\ x_2 + \alpha(x_1 + x_3) \\ x_3 + \alpha(x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \alpha x_1 \\ x_2 - \alpha x_2 \\ x_3 - \alpha x_3 \end{pmatrix} = (1 - \alpha)\, x.$$

Donc $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle^\perp \subset E_{1-\alpha}$.

Si $1 - \alpha \neq 1 + 2\alpha$, on a une décomposition en somme directe orthogonale de 2 sous espaces propres

$$\mathbb{R}^3 = E_{1+2\alpha} \oplus E_{1-\alpha} \;;$$

si $1 - \alpha = 1 + 2\alpha$ ($\Longleftrightarrow \alpha = 0$), $M_0 = I$ et tout $\mathbb{R}^3$ est un sous espace propre.

(7) Signature de q_α : voir en fin de document.

4. Cas $\alpha = 0$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (toute base diagonalise I ...)

Cas $\alpha \neq 0$: base de $E_{1+2\alpha}$:

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $E_{1+2\alpha}$. Il faut normer ce vecteur : $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base orthonormée de $E_{1+2\alpha}$

(ici la condition d'orthogonalité est trivialement vérifiée).

base de $E_{1-\alpha}$: Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Utilisons le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Normons le 1er vecteur ; $v_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour trouver le 2e vecteur :

$$v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \alpha v_1$$

On résout $(v_2' | v_1) = 0 \iff \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) - \alpha \underbrace{\|v_1\|^2}_{=1} = 0$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc $v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Normons ce vecteur : $\|v_2'\|^2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

$$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une b.o.n. de vecteurs propres est donnée par

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

5. $\alpha = -1 \Rightarrow M_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$q_{-1}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

On peut reprendre la forme en somme de carrés obtenue à la question 2. : $q_{-1}(x) = (x_1 - (x_2+x_3))^2 - (x_2+x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2$

Quand $x_2 = x_3$: $= (x_1 - 2x_2)^2 - 4x_2^2$.

Ceci s'annule ssi :

$$x_1 - 2x_2 = 2x_2 \iff x_1 = 4x_2$$

ou $x_1 - 2x_2 = -2x_2 \iff x_1 = 0$

On a donc $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cup \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(l'union de 2 droites vectorielles — pas la somme !)

Fin de la question 3 (oubli)

Les valeurs propres sont $1-\alpha$ (ordre 2) et $1+2\alpha$ (ordre 1).

α	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$1-\alpha$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+2\alpha$		$-$	0	$+$		$+$	

Donc : pour $-\infty < \alpha < -\frac{1}{2}$, signature $(2,1,0)$

pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, " $(2,0,1)$

pour $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$, " $(3,0,0)$

pour $\alpha = 1$, " $(1,0,2)$

pour $1 < \alpha$, " $(1,2,0)$