L3 PS math. 2020–21
Analyse Complexe 2
Contrôle Terminal = Solution

1 (a) f admet une singularité essentielle en a si et seulement si pour $0 < |z-a| < r$,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-a)^k ,$$

et $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists\ k_N \leq -N$ tq $a_{k_N} \neq 0$.

Si $m \in \mathbb{Z}$, $g(z) = (z-a)^m f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-a)^{k+m}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{k-m} (z-a)^k .$$

Donc $a'_k = a_{k-m}$ donne le coef. de $(z-a)^k$ dans la série de Laurent de g autour de a.

Soit $N \in \mathbb{N}$, alors $k'_N = k_{N+m} + m \Rightarrow k'_N - m = k_{N+m}$

et $a'_{k'_N} = a_{k'_N - m} = a_{k_{N+m}} \neq 0$

et $k'_N = k_{N+m} + m \leq -(N+m) + m = -N$.

cqfd

(b) Si f admet une singularité essentielle, alors elle n'est bornée dans aucun voisinage de a, car sinon elle admettrait une singularité éliminable en a. D'après la question (a), cette propriété s'étend à $(z-a)^m f(z)$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$.
Ceci montre l'implication directe.

Réciproquement, si f admet une singularité éliminable alors $(z-a)^0 f(z) = f(z)$ est bornée sur $D(a,r')$, $\forall r' < r$.
Si f admet un pôle d'ordre m, alors $(z-a)^m f(z)$ est bornée sur $D(a,r')$, $\forall r' < r$. Donc si on suppose $(z-a)^m f(z)$ non bornée $\forall m$, $\forall r' > 0$, la seule possibilité est une singularité essentielle.

2 (a) Le théorème de l'application de Riemann dit que si Ω est simplement connexe, différent de $\mathbb{C}$, et $z_0 \in \Omega$, alors il existe une unique bijection holomorphe φ de Ω sur $D(0,1)$ telle que $\varphi(z_0) = 0$ et $\varphi'(z_0) > 0$.

Or $H \subsetneq \mathbb{C}$ et H est convexe, donc simplement connexe.

(b) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = \bar{x}$,

donc $|x - \bar{z}_0| = |\bar{x} - \bar{z}_0| = |\overline{(x - z_0)}| = |x - z_0|$.

(c) Remarquons que $z_0 \in H \Rightarrow \bar{z}_0 \notin H$.

Donc f est bien définie sur H.

Posons $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, alors $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$

On a $y > 0$ (car $z \in H$), $y_0 > 0$ (car $z_0 \in H$).

$$|z - z_0|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

$$|z - \bar{z}_0|^2 = (x - x_0)^2 + (y + y_0)^2$$

$$|z - \bar{z}_0|^2 - |z - z_0|^2 = 2yy_0 > 0,$$

donc $|z - \bar{z}_0| > |z - z_0|$, donc $|f(z)| < 1$.

Solution alternative avec le principe du module maximum (plus subtile).

Supposons qu'il existe $z_1 \in H$ tq $|f(z_1)| = 1 + \eta > 1$.

Alors pour R suffisamment grand et $|z| = R$, on aura $|f(z)| \leq 1 + \frac{\eta}{2}$ (car $\lim\limits_{|z| \to \infty} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} = 1$).

Donc sur $\Omega = D(0,R) \cap H$, on a $|f(z)| \leq 1 + \frac{\eta}{2}$ $\forall z \in \partial\Omega$,

$f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, et $|f(z_1)| > \max\limits_{\partial\Omega} |f|$: Contradiction !

Donc la supposition est fausse, donc
$\forall z \in H, \quad |f(z)| \leq 1$.
Si on avait : $\exists\, z_2 \in H$ tq $|f(z_2)| = 1$,
alors ce serait un maximum local pour $|f|$,
donc f serait constante, de module $= 1$.
Or $f(z_0) = 0$, donc c'est impossible, donc
$\forall z \in H, \quad |f(z)| < 1$. cqfd.

(d) La question précédente montre que $f(H) \subset D(0,1)$.
Mais il faut montrer que tout point de $D(0,1)$
admet un unique antécédent par f, dans H.
Soit $w \in D(0,1)$. Résolvons $w = \dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$

$\iff \quad (z - \bar{z}_0)\, w = z - z_0$

$\iff \quad z(1 - w) = z_0 - \bar{z}_0 w$

$\iff \quad z = \dfrac{z_0 - \bar{z}_0 w}{1 - w}$

Note : $z_0 - \bar{z}_0 w \neq 0$, car $|z_0 - \bar{z}_0 w| \geq |z_0| - |z_0||w|$ $= |z_0|(1-|w|) > 0$ car $z_0 \neq 0$ et $|w| < 1$.

Calculons $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}\left(\dfrac{(z_0 - \bar{z}_0 w)(1 - \bar{w})}{|1 - w|^2}\right)$

$$= \frac{\operatorname{Im}\left(z_0 - z_0\bar{w} - \bar{z}_0 w + \bar{z}_0 |w|^2\right)}{|1 - w|^2}$$

Or $-(z_0 \bar{w} + \bar{z}_0 w) = -2\operatorname{Re}(z_0 \bar{w}) \in \mathbb{R}$, donc
on trouve $= \dfrac{\operatorname{Im}(z_0 + \bar{z}_0 |w|^2)}{|1 - w|^2} = \dfrac{y_0 - y_0 |w|^2}{|1 - w|^2}$

$$= y_0 \frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2} > 0 \quad \text{car } y_0 > 0 :$$

nous avons bien que l'unique antécédent
de w appartient à H.

• NB : on peut aussi faire le calcul en posant $z_0 = x_0 + iy_0$ $(y_0 > 0)$ et $w = u + iv$ $(u^2+v^2<1)$. C'est fastidieux.

(e) La seule condition qui nous manque serait $\varphi'(z_0) > 0$.

Or $$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(1 + \frac{\bar{z}_0 - z_0}{z - \bar{z}_0}\right) = -\frac{(\bar{z}_0 - z_0)}{(z-\bar{z}_0)^2},$$

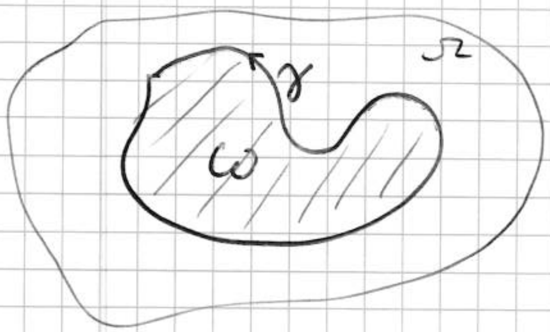
donc $$f'(z_0) = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z_0 - \bar{z}_0)^2} = \frac{1}{z_0 - \bar{z}_0}$$

Posons donc $\varphi(z) = \dfrac{z_0 - \bar{z}_0}{|z_0 - \bar{z}_0|} f(z)$;

Comme $\left|\dfrac{z_0 - \bar{z}_0}{|z_0 - \bar{z}_0|}\right| = 1$, on a toujours une bijection de H ~~dans~~ $D(0,1)$ avec $\varphi(z_0) = \dfrac{z_0 - \bar{z}_0}{|z_0 - \bar{z}_0|} \cdot 0 = 0$,

et $\varphi'(z_0) = \dfrac{1}{|z_0 - \bar{z}_0|} > 0$.

3



(a) Si $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \omega$, alors $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \bar{\omega}$ (puisque $|f(z)| = 1$ sur le bord) et donc

$\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\omega})$ et $\forall z \in \omega$, $\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{1} = 1$

De même $f \in \mathcal{H}(\omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\omega})$ et $\forall z \in \omega$, $|f(z)| \leq 1$.

Donc $|f(z)| = 1$ $\forall z \in \omega$, donc $|f|$ atteint un maximum local en tout point de ω et f doit être constante sur ω. Mais $\omega \neq \emptyset$ et Ω connexe, donc* $f \equiv$ cste sur Ω, ce qui est exclu (*par le théorème du prolongement analytique).

(b) Principe de l'Argument :

Soit γ un chemin C^1 par morceaux, fermé, dont l'image est contenue dans un ouvert Ω, et tel que $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\operatorname{Ind}(\gamma; w) = 0$. Soit f holomorphe sur $\Omega \setminus S$ (où S est discret dans Ω) telle que les singularités de f en S soient éliminables ou des pôles.

De plus l'image de γ est contenue dans $\Omega \setminus (S \cup f^{-1}\{0\})$.

Alors $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \sum_{s \in S \cup f^{-1}\{0\}} \operatorname{Ind}(\gamma, s) \cdot \operatorname{ord}(f, s)$,

où $\operatorname{ord}(f,s) =$ ordre d'annulation de f en s (si c'est un zéro)

$= -$ ordre du pôle de f en s (si c'est un pôle).

Corollaire :

Version simplifiée : γ courbe de Jordan, C^1 par morceaux, f holomorphe sur Ω, $\hat{\gamma} \subset \Omega$, $f(z) \neq 0$ sur γ

alors $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta =$ nombre de zéros de f dans $\hat{\gamma}$, comptés avec multiplicités.

(c) Sur γ, $|f(z)| = 1$

Or $w \in D(0,1)$ donc $|w| < 1$,

donc $f(z) - w$ ne s'annule pas

et la fonction $\dfrac{f'(z)}{f(z) - w}$ est bien définie et continue en w, pour tout z fixé.

De plus dans un voisinage U de $w_0 \in D(0,1)$, avec $\overline{U} \subset D$, elle sera bornée independamment de $w \in \overline{U}$.

Par le théorème de Lebesgue de continuité sous l'intégrale, g est continue en w.

(d) Mais $\frac{1}{2\pi i} g$ est continue à valeurs entières d'après le Principe de l'Argument.

$D(0,1)$ est connexe, donc $\frac{1}{2\pi i} g$ est constante sur $D(0,1)$.

D'après le PdA encore, $g(w)$ représente le nombre de zéros de f_w dans ω. Donc il ne dépend pas de w (et $f_0 = f$).

(e) On a vu à la question (a) que f admet un nombre non-nul de zéros sur ω donc f_w aussi, donc $\exists z \in \omega$ tq. $f_w(z) = 0$, c'est à dire $f(z) = w$: $f(\omega) \supset D(0,1)$.