L3 PS

Analyse Complexe

CC 30-09-2019 - Solution

1. $f(z) = (z-1)(\bar{z}+1)$

On étudie la limite de $\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$

$$= \frac{1}{h}\left[(z+h-1)(\bar{z}+\bar{h}+1)-(z-1)(\bar{z}+1)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[h(\bar{z}+1)+\bar{h}(z-1)+h\bar{h}\right]$$

$$= \bar{z}+1+\bar{h}+\frac{\bar{h}}{h}(z-1).$$

Or $\lim\limits_{h\to 0}(\bar{z}+1+\bar{h}) = \bar{z}+1$, existe pour tout z.

D'autre part, $\left|\dfrac{\bar{h}}{h}\right| \leq 1$ pour tout $h \neq 0$,

mais $\dfrac{\bar{h}}{h}$ n'admet pas de limite quand $h \to 0$:

par exemple, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}} \dfrac{\bar{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x} = 1$, tandis

que $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y\in\mathbb{R}}} \dfrac{\overline{(iy)}}{iy} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-iy}{iy} = -1 \neq 1$, donc

la limite au sens complexe n'existe pas.

Finalement, si $z-1=0$, i.e. $z=1$, f est $\mathbb{C}$-dérivable et $f'(1) = \bar{1}+1 = 2$.

Si $z-1\neq 0$, $\dfrac{\bar{h}}{h}(z-1)$ n'admet pas de limite et f n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable.

2. a) A partir de $\frac{1}{1-a} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k$,

quand $|a| < 1$, on voit que

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} \quad \text{pour} \quad |z^2| < 1 \quad \text{donc pour} \quad |z| < 1.$$

D'autre part le terme général de la série ci-dessus ne tend pas vers 0 quand $|z| \geq 1$, donc le rayon de cette série entière vaut 1.

b) $$f'(z) = (-1)(-2z)(1-z^2)^{-1-1}$$

$$= \frac{2z}{(1-z^2)^2}$$

$$= g(z)$$

d'après la formule de dérivation des puissances.

D'autre part, on sait que la dérivée d'une fonction analytique est analytique et son développement en série entière s'obtient en dérivant terme à terme celui de la fonction d'origine (et a le même rayon de convergence).

Donc $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2k\, z^{2k-2} = 2\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, z^{2k}$,

avec rayon de convergence $= 1$.

c) $$\frac{\alpha}{1-z} + \frac{\beta}{1+z} = \frac{(\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)\, z}{(1-z)(1+z)}$$

donc on doit avoir $\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \beta = 0$, d'où

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right).$$

d) f est une fraction rationnelle, donc développable en série entière autour de tout point qui n'est pas un pôle, donc en particulier autour de 3.

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(z-3)-3} = -\frac{1}{2+(z-3)}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{z-3}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-3}{2}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}(z-3)^k.$$

Cette série converge si et seulement si $\left|\frac{z-3}{2}\right|<1$, donc $|z-3|<2$: le rayon de convergence est 2.

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+(z-3)+3} = \frac{1}{4+(z-3)}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\frac{z-3}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-3}{4}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^{k+1}}(z-3)^k.$$

La série converge ssi $\left|\frac{z-3}{4}\right|<1$, le rayon de CV est 4.

En additionnant :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{4^{k+1}}\right)(z-3)^k.$$

Cette série converge quand $|z-3|<2$, et le terme général est non borné quand $|z-3|>2$, donc son rayon de convergence vaut 2.

3. a) g est analytique donc continue, donc $\exists\, r_0$ t.q. $|z - z_0| < r_0 \Longrightarrow$ $|g(z) - g(z_0)| < |g(z_0)|$ et donc $g(z) \neq 0$; sur le disque $D(z_0, r_0)$, $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ définit donc une fonction analytique.

b) $$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)\,\overline{g(z)}}{g(z)\,\overline{g(z)}} = \frac{f(z)\,\overline{g(z)}}{|g(z)|^2},$$

or $|g(z)|^2 > 0$, $f(z)\,\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ par hypothèse, donc $\dfrac{f(z)}{g(z)} \in \mathbb{R}$, $\forall z \in D(z_0, r_0)$, donc cette fonction doit être constante.

c) $f(z) - c\,g(z)$ est analytique sur Ω, et $f(z) - c\,g(z) = 0$ $\forall z \in D(z_0, r_0)$, donc ses zéros ne sont pas isolés, donc $f - cg \equiv 0$, donc $f(z) = c\,g(z)$ $\forall z \in \Omega$, et $\dfrac{f(z)}{g(z)} = c$ pour tout $z \in \Omega$ tel que $g(z) \neq 0$.