L3 PS Physique, math. 2020-2021

Contrôle Continu Analyse Complexe 1

2.10.2020

Solution

1. On cherche à vérifier que $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$.

Or $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial x} - i\frac{\partial H}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 H}{\partial x^2},$$

d'après le thm. de Schwarz et $\Delta H = 0$.

$$i\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial x} - i\frac{\partial H}{\partial y}\right) = i\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y},$$

car $-i^2 = 1$. cqfd.

2. a) L'hypothèse donne : $\forall z$, $|f(z)| \geq \frac{1}{1+|z|} > 0$, donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) \neq 0$, donc $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ est bien définie et holomorphe, de classe $\mathcal{C}^1$, sur tout $\mathbb{C}$.

b) Les estimations de Cauchy donnent : $\forall R > 0$,

$$|a_k| \leq \frac{\max_{z \in C(0,R)} |g(z)|}{R^k} \leq \frac{\max_{z \in C(0,R)} (1 + |z|)}{R^k} = \frac{R+1}{R^k}.$$

Pour $k \geq 2$, $\lim_{R \to \infty} \frac{R+1}{R^k} = 0$, donc $a_k = 0$.

c) $g(z)$ est l'inverse d'un nombre, donc $g(z) \neq 0$. Or si $a_1 \neq 0$, $g\left(-\frac{a_0}{a_1}\right) = 0$. Donc $a_1 = 0$, donc $g(z) = a_0$, constante, et $f(z) = \frac{1}{a_0}$ (car $a_0 \neq 0$ puisque $g(z) \neq 0$, $\forall z$).

3. a) f admet des pôles quand $(z^2+1)^2=0$ (et $z^2 \neq 0$). Or $z^2+1=(z+i)(z-i)$,

donc $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2}$ et f admet des pôles (d'ordre 2) en $-i$ et $+i$.

Le seul pôle qui vérifie $\operatorname{Im} z > 0$ est $+i$. Près de ce pôle on peut écrire $f(z) = \dfrac{z^2(z+i)^{-2}}{(z-i)^2} = \dfrac{g(z)}{(z-i)^2}$

(par exemple si $|z-i|<1$, $z+i \neq 0$ et donc $g(z) = z^2(z+i)^{-2}$ est holomorphe sur $D(i,1)$).

Comme le pôle est d'ordre 2, le résidu vaudra $g'(i)$.

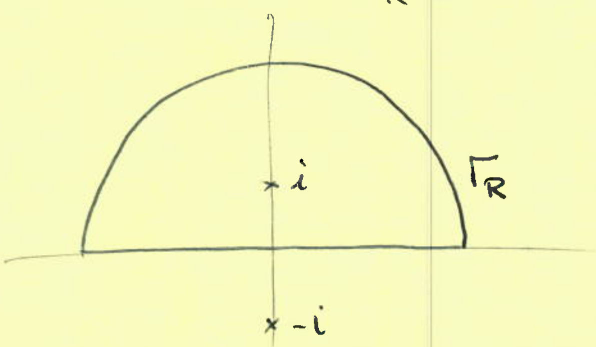
Or $g'(z) = 2z(z+i)^{-2} + z^2(-2)(z+i)^{-3}$
$= 2z(z+i)^{-3}[z+i-z] = 2iz(z+i)^{-3}$.

D'où $g'(i) = 2i^2(2i)^{-3} = \dfrac{1}{4i}$.

Donc $\operatorname{Res}(f;i) = \dfrac{1}{4i} = -\dfrac{i}{4}$.

b) $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;i)$ quand $R>1$ car i est le seul pôle contenu dans $\hat{\Gamma}_R$

$= \dfrac{2\pi i}{4i} = \dfrac{\pi}{2}$.



NB : si $R<1$, $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$

si $R=1$ l'intégrale n'est pas définie !

c) $$\left| \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz \right| \leq \ell(\gamma_{2,R}) \max_{\gamma_{2,R}} |f|$$

$$\leq \pi \cdot R \cdot \frac{R^2}{(R^2-1)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

<u>détails</u> : pour $z \in \gamma_{2,R}$, $|z| = R$, donc $|z^2| = R^2$

et $|(z^2+1)^2| = |z^2+1|^2 \geq (R^2-1)^2$

par l'inégalité triangulaire

donc $z \in \gamma_{2,R} \Rightarrow |f(z)| \leq \dfrac{R^2}{(R^2-1)^2}$.

d) quand $x \to +\infty$, $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2} \sim \dfrac{x^2}{(x^2)^2} = \dfrac{1}{x^2}$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge. Par parité, on a la même chose pour $x \to -\infty$.

Donc $$\frac{\pi}{2} = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2} + 0.$$

e) nous avons vu en TD que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

donc $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2} \right) dx$$

$$= \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$