L3 PS maths + physique 2020-21

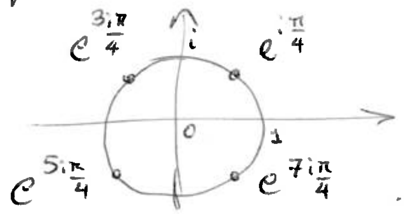
Analyse Complexe 1, Contrôle Terminal 1ère session

Solution

1 a) $z^4 = -1 = e^{i\pi + 2ki\pi}$, donc les solutions sont de la forme $e^{i\frac{\pi}{4} + \frac{2k}{4} i\pi} = e^{i\frac{\pi}{4} + ki\frac{\pi}{2}}$.

Si $k' = k + 4n$, alors $k' i\frac{\pi}{2} = ki\frac{\pi}{2} + 2i\pi . n$, donc les 2 exponentielles sont égales $\longrightarrow$ on obtient 4 solutions distinctes pour $k = 0, 1, 2, 3$:

$e^{i\pi/4}$, $e^{i3\pi/4}$, $e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $e^{i\frac{7\pi}{4}}$.



b) C'est une intégrale généralisée, L'intégrande est continue et bornée $\Rightarrow$ il suffit d'étudier les bornes infinies. Or $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx$ converge (intégral "de Riemann" avec ~~\[illegible\]~~ exposant $4 > 1$) et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4} dx$ converge pour la même raison.

Comme $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^4+1} dx$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4+1} dx$ convergent, cqfd.

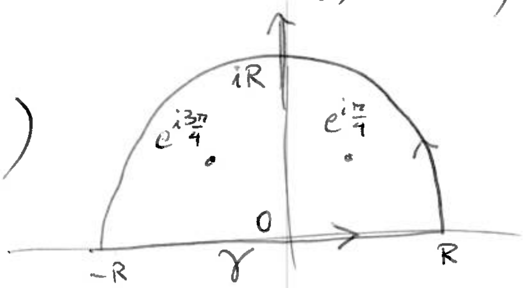
c) $P(x) = (x-a) P_1(x) \Rightarrow P'(x) = (x-a)P_1'(x) + P_1(x)$, donc $P'(a) = 0 + P_1(a)$, cqfd.

d) z^4+1 a quatre zéros distincts (a), donc ils sont tous simples. $\frac{d}{dz}(z^4+1) = 4z^3$

$z^4+1 = \left(z - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) P_1(z)$, avec $P_1(e^{i\frac{\pi}{4}}) = 4\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3$ d'après (c). Donc $\mathrm{Res}\left(f, e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \dfrac{e^{i\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}}}{4\, e^{\frac{3i\pi}{4}}}$

De même

$$\mathrm{Res}\left(f, e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) = \frac{e^{i\lambda e^{\frac{3i\pi}{4}}}}{4\, e^{\frac{9i\pi}{4}}} = \frac{e^{i\lambda e^{\frac{3i\pi}{4}}}}{4\, e^{\frac{i\pi}{4}}}.$$

e) 

D'après la formule des résidues,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(f, e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + \mathrm{Res}\left(f, e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\right)$$

$$= 2\pi i \, \frac{1}{4}\left(-e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}} + e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\lambda e^{\frac{3i\pi}{4}}}\right) \quad (*)$$

f) $$\int_\gamma f(z)dz = \frac{\pi i}{2}\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \exp\left(i\lambda \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1-i}{\sqrt{2}} \exp\left(i\lambda \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\right) \quad \cancel{(*)}$$

$$= \frac{\pi i}{2} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + i\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}} - i\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi i}{2} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}\left(-i\sqrt{2}\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}} - i\sqrt{2}\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \pi e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) = \pi e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Autre calcul : $(*) = \frac{\pi i}{2}\left(-e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\lambda\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\lambda\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right)$

$$= \frac{\pi i}{2} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}\left(-e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} + e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{2} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}\left(-2i\sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \pi e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$|e^{i\lambda z}| = e^{\mathrm{Re}(i\lambda z)} \qquad e^{-\lambda \,\mathrm{Im}\, z}$$

g) $\cancel{|f(z)| \leq \dfrac{\ldots}{|z^4+1|} \leq \dfrac{\ldots}{|z^4+1|}}$.

~~Si~~ $\cancel{|z| \geq 2^{1/4}}$ ~~, alors~~ $\cancel{|z^4+1| \geq |z|^4 - 1 \geq 2 - 1 = 1}$

~~D'autre part~~ Si $\mathrm{Im}\, z \geq 0$, alors $-\lambda \,\mathrm{Im}\, z \leq 0$

et $e^{-\lambda \,\mathrm{Im}\, z} \leq 1$, ~~d'où~~ $\cancel{|f(z)| \leq 1}$.

~~(Pour~~ $\cancel{R \to \infty}$ ~~, on peut supposer~~ $\cancel{R \geq 2^{1/4}}$

Quand $z \in \gamma_2$, avec $R > 1$, $|z^4+1| \geq |z|^4 - 1 = R^4 - 1$,

$|e^{i\lambda z}| \leq 1$, donc $|f(z)| \leq \dfrac{1}{R^4-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$.

h) Pour $\xi \leq 0$ on pose $\lambda := -2\pi\xi \geq 0$

et $e^{-2\pi i x\xi} f_0(x) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Donc
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} g(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)\,dz$$
$$= \lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)\,dz = \pi e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \pi\, e^{\pi\sqrt{2}\,\xi} \sin\left(-\pi\xi\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \pi e^{\pi\sqrt{2}\,\xi} \cos\left(-\pi\xi\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \widehat{f_0}(\xi)$$
$$= \pi e^{-\pi\sqrt{2}|\xi|} \cos\left(\pi|\xi|\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

puisque $\xi = -|\xi|$ quand $\xi \leq 0$.

i)
$$\widehat{f_0}'(\xi) = \pi\, e^{\pi\sqrt{2}\,\xi}\left[\pi\sqrt{2}\sin\left(-\pi\xi\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \pi\sqrt{2}\cos\left(-\pi\xi\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= -\pi^2\sqrt{2}\, e^{\pi\sqrt{2}\,\xi}\left[\sin\left(\pi\xi\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\pi\xi\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

D'où
$$\widehat{f_0}'(0) = -\pi^2\sqrt{2}\cdot 1 \cdot \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0.$$

j) On sait que la transformée de Fourier d'une fonction paire est paire (grâce au changement de variable $x \mapsto -x$).
Donc $\hat{f_0}$ est paire, donc pour $\xi \geq 0$,

$$\hat{f_0}(\xi) = \pi e^{-\pi\sqrt{2}|\xi|} \cos\left(\pi|\xi|\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \pi e^{-\pi\sqrt{2}\xi} \cos\left(\pi\xi\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

k) On sait que $\int_{-\infty}^{\infty} x f_0(x)\, dx$ est convergente,
donc $\hat{f_0}$ est $\mathcal{C}^1$ et $\hat{f_0}' = \widehat{-2\pi i x f_0(x)}$ (théorème sur les transformées de Fourier).
Donc $\hat{f_0}$ est dérivable en 0. Mais $\hat{f_0}$ est paire,
donc $\frac{d}{d\xi}\hat{f_0}(\xi) = \frac{d}{d\xi}\hat{f_0}(-\xi) = \left(-\frac{d}{d\xi}\hat{f_0}\right)(-\xi) = -\hat{f_0}'(-\xi)$.
En appliquant ceci à $\xi = 0$, $\hat{f_0}'(0) = -\hat{f_0}'(0)$
donc $\hat{f_0}'(0) = 0$.

---

2. a) $|e^{i\theta} - a| = |e^{i\theta}(1 - ae^{-i\theta})| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_{=1}|1 - ae^{-i\theta}|$
$= |1 - ae^{-i\theta}|$.

$\overline{1 - ae^{-i\theta}} = \bar{1} - \bar{a}\,\overline{e^{-i\theta}} = 1 - \bar{a}e^{i\theta}$,
donc $|1 - ae^{-i\theta}| = |1 - \bar{a}e^{i\theta}|$.

b) $1 - \bar{a}z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{a}}$ (si $a \neq 0$), donc f est holomorphe, comme quotient de polynômes, sur l'ensemble où le dénominateur est non nul, c'est à dire $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\bar{a}}\}$.
Si $a = 0$, $f(z) = z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

c) Si f est holomorphe sur Ω, ~~alors~~ Ω connexe, alors $|f|$ admet un maximum local sur Ω si et seulement si f est constante sur Ω.

[Corollaire = si Ω est borné, et f holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$, alors
$\max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$ (le maximum du module est atteint sur la frontière).]

Pour notre f, ~~[illegible]~~ avec $\Omega = D(0,1) = \{|z|<1\}$,

$\partial\Omega = \{z : |z|=1\} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$

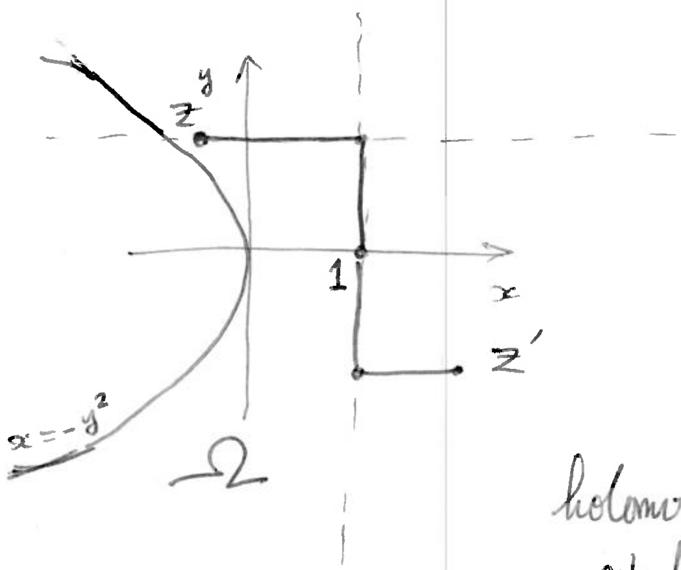
et $|f(e^{i\theta})| = \dfrac{|e^{i\theta}-a|}{|1-\bar{a}e^{i\theta}|} = 1$ d'après (a).

De plus $\overline{\Omega} \subset \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\bar{a}}\}$, donc ~~f~~ est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. En particulier $\forall z \in \Omega$, $|f(z)| \leq 1 = \max_{\partial\Omega} |f|$. Si on avait $z \in \Omega$ t.q. $|f(z)| = 1$, ce serait un maximum, donc un maximum local puisque $z \in \Omega$, donc f serait constante, ce qui est absurde ($f(a) = 0$ par ex.)

Donc $\forall z \in \Omega$, $|f(z)| < 1$.

3) a) Soit $z = x+iy \in \Omega$. On va décrire une ligne brisée qui relie z au point 1 ($\in \Omega$), donc tous les points $z, z' \in \Omega$ peuvent être reliés en passant par 1 et Ω sera connexe par arcs.

La ligne brisée obtenue par la concaténation du segment horizontal $[x+iy\,;\,1+iy]$ ~~est~~ (contenue dans la demi droite $]-y^2+iy\,;\,+\infty+iy[$ donc dans Ω) et du segment vertical $[1+iy\,;\,1]$ ($\subset \{\mathrm{Re}\, z>0\} \subset \Omega$) relie z à 1.

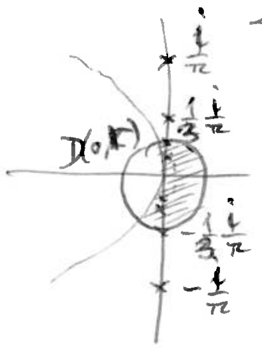


L'ensemble $]0,+\infty[$ est entièrement constitué de points non-isolés. Si la fonction $f(z) - (1+e^{-\frac{1}{z}})$, qui est holomorphe sur Ω (car $z \mapsto 1+e^{-\frac{1}{z}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et $\Omega \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$) s'annule sur $]0,+\infty[$, alors comme Ω est connexe par arcs, elle doit s'annuler sur Ω par le théorème des zéros isolés.

b) $f(z) = 0 \iff e^{-\frac{1}{z}} = -1$

$\iff -\frac{1}{z} = i\pi + 2k\pi i$, pour un $k \in \mathbb{Z}$

$\iff z = \dfrac{-1}{i(\pi+2k\pi)} = \dfrac{i}{\pi}\,\dfrac{1}{2k+1}$.



Donc $y = \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{1}{2k+1}$, pour un $k \in \mathbb{Z}$

(2 suites infinies tendant vers 0).

c) g est holomorphe sur $D(0,r) \cap \Omega$ qui est connexe, f aussi, donc $g \equiv f$ sur $]0,r[$ qui n'a pas de point d'accumulation $\Rightarrow g \equiv f$ sur $D(0,r)\cap\Omega$.

Donc $g(iy) = f(iy)$ en particulier, pour $0 < |y| < r$. mais alors $\left\{\frac{1}{\pi}\frac{1}{2k+1},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ admet un point d'accumulation en 0, 0 est un zéro non isolé de g, donc $g \equiv 0$ sur $D(0,r)$ ce qui contredit $g = f$ sur $]0,r[$.

d) (hors barème)

$$|e^{-\frac{1}{z}}| = e^{-Re(\frac{1}{z})} = e^{-Re\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)} = e^{\frac{-Re\, z}{|z|^2}}$$

$$= e^{\frac{-x}{x^2+y^2}} \leq e^{\frac{y^2}{x^2+y^2}} \leq e^{1} = e.$$

Donc $|f(z)| \leq 1 + |e^{-\frac{1}{z}}| \leq 1+e, \ \forall z \in \Omega.$

D'autre part $f(iy) = 1 + e^{-\frac{i}{y}} = 1 + \cos\frac{1}{y} + i \sin\frac{1}{y}$,

en particulier cette fonction n'admet pas de limite quand $y \to 0$ ($f\left(\frac{i}{\pi(2k+1)}\right) = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$,

$f\left(\frac{i}{2k\pi}\right) = 2 \ \forall k \in \mathbb{Z}^*$, et ces deux suites tendent vers 0), donc elle n'est pas prolongeable par continuité.