UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : PRÉPARATION À L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES SOLUTION DE L'EXERCICE 3.5 SUR UNE SÉRIE ENTIÈRE NON PROLONGEABLE

PASCAL THOMAS

Rappel du texte de l'exercice.

0.1. *a) Soit $f(z) = \sum_k a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence* 1*, avec $a_k \geq 0$ pour tout k. Montrer que f n'est pas prolongeable analytiquement au voisinage du point* 1*.*

(Indication : montrer que si f était prolongeable, sa série de Taylor au point $\frac{1}{2}$ aurait un rayon de convergence supérieur à $\frac{1}{2}$)

b) On pose $f(z) = \sum_{k\geq 0} z^{k!}$. Montrer que f n'est prolongeable en aucun point du cercle unité.

(Source : Chambert-Loir & Fermigier, Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse, tome 2.)

Solution.

a) Si f est prolongeable, on a un voisinage de 1, disons un disque $D(1, r)$, et une fonction g analytique sur $D(1, r)$ telle que si on pose $U := D(0, 1) \cap D(1, r)$, qui est un ouvert convexe donc connexe, on a $f|_U = g|_U$. On peut donc définir une nouvelle fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur l'ouvert $\Omega := D(0, 1) \cup D(1, r)$ par $\tilde{f}(z) := f(z)$ pour $z \in D(0, 1)$, et $\tilde{f}(z) := g(z)$ pour $z \in D(1, r)$.

Il suit de la formule de Cauchy que la fonction $\tilde{f}$ sera développable en série entière au voisinage de chaque point a de Ω, avec un rayon de convergence de la série au moins égal à la distance de a à $\partial\Omega$.

Soit $\{e^{i\theta_r}, e^{-i\theta_r}\} = \partial D(0, 1) \cap \partial D(1, r)$. (Un rapide raisonnement géométrique, ou un calcul, montre que $\theta_r = 2 \arcsin \frac{r}{2} > r$ puisque la corde est plus courte que l'arc.) Il est facile de voir que le disque $D(\frac{1}{2}, R) \subset \Omega$, avec $R := |\frac{1}{2} - e^{i\theta_r}|$. Or

$$R^2 = |\frac{1}{2} - e^{i\theta_r}|^2 = (\frac{1}{2} - \cos\theta_r)^2 + \sin^2\theta_r = \frac{1}{4} + (1 - \cos\theta_r) > \frac{1}{4},$$

donc $R > \frac{1}{2}$.

Calculons la série de Taylor de $\tilde{f}$ au point $\frac{1}{2}$. On sait que $\tilde{f}(z) = \sum_k b_k(z - \frac{1}{2})^k$ avec $b_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\frac{1}{2})$. Comme $f = \tilde{f}$ dans un voisinage du point $\frac{1}{2}$ et que la série entière qui définit f est dérivable terme à terme en tout point de son disque ouvert de convergence, on a

$$b_k = \frac{1}{k!} \sum_{j=k}^{\infty} a_j \frac{j!}{(j-k)!} (\frac{1}{2})^{j-k} = \sum_{j=k}^{\infty} a_j \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} (\frac{1}{2})^{j-k}.$$

Il s'en suit que pour $|z-\frac{1}{2}|<R$, en particulier pour $\frac{1}{2}<z<\frac{1}{2}+R$, nous avons

$$\tilde{f}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z-\frac{1}{2})^k\sum_{j=k}^{\infty}a_j\left(\begin{array}{c}j\\k\end{array}\right)(\frac{1}{2})^{j-k}.$$

Comme tous les termes sont positifs dans l'intervalle de z donné ci-dessus (grâce à l'hypothèse $a_k>0$), on peut échanger l'ordre de sommation et on obtient

$$\tilde{f}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\sum_{k=0}^{j}\left(\begin{array}{c}j\\k\end{array}\right)(\frac{1}{2})^{j-k}(z-\frac{1}{2})^k=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j,$$

par la formule du binôme (dans la somme finie). Mais si on prend $R'\in]\frac{1}{2},R[$, cette égalité reste valable pour $z=\frac{1}{2}+R'>1$, et démontre que la série entière $\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j$ converge pour un $z\notin\overline{D(0,1)}$, donc son rayon de convergence doit être strictement plus grand que 1 : contradiction.

b) Remarquons d'abord pour que cette fonction, $a_k=1$ si il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $k=n!$, $a_k=0$ sinon. Donc $\limsup_{k\to\infty}|a_k|^{1/k}=1$, et la formule de Hadamard nous dit que le rayon de convergence de la série est exactement 1.

D'autre part, si $\theta_0\in\mathbb{R}$, alors la fonction $z\mapsto f(e^{i\theta_0}z)$ est prolongeable au point 1 si et seulement si la fonction f est prolongeable au point $e^{i\theta_0}$.

Supposons qu'il existe un tel $e^{i\theta_0}$ tel que f soit prolongeable au voisinage de ce point. Il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $e^{2\pi ip/q}$ soit assez proche de $e^{i\theta_0}$ pour que f soit prolongeable au voisinage de $e^{2\pi ip/q}$.

Ecrivons

$$f(z)=\sum_{k=0}^{q-1}z^{k!}+\sum_{k=q}^{\infty}z^{k!}=:P_q(z)+f_q(z).$$

Comme P_q est un polynôme, f est prolongeable au voisinage d'un point si et seulement si f_q est prolongeable au voisinage de ce point. Or $k!$ est un multiple de q pour tout $k\geq q$, donc $f_q(e^{2\pi ip/q}z)=f_q(z)$, donc f_q est prolongeable au voisinage de 1 : d'après la question a), c'est une contradiction.

Merci à Patrick Tardivel pour sa contribution à cette solution.