L2 PS math = Algèbre (S4)
Solution Examen 2e session

1. (1) oui ; oui (déjà diagonale !)

(2) oui (2 blocs, un pour chaque valeur propre
0 ou 1 au dessus de la diagonale
dans chaque bloc) ;

non (la réduite de Jordan n'est pas ici diagonale)

(3) non ($a_{12} \neq 0$ donc les v.p. distinctes
ne sont pas dans des blocs différents)

oui ($\text{rang}(M-2I) = 1$ donc $\dim \text{Ker}(M-2I) = 2$)

(4) non (même raison qu'au 3) ;

non ($\text{rang}(M-2I) = 2$).

2. a) Théorème du rang $\Longrightarrow$ $\dim \text{Im}\, u = \dim E - \dim \text{Ker}\, u$

Hyp. de Somme directe $\Rightarrow$ $\dim \text{Ker}\, u + \dim S = \dim E$

donc $\dim S = \dim E - \dim \text{Ker}\, u$, cqfd.

b) $x \in E \Longrightarrow x = x_1 + x_2,\ x_1 \in \text{Ker}\, u,\ x_2 \in S.$

Donc $u(x) = u(x_1) + u(x_2) = 0 + u(x_2) = u(x_2)$

et $u(x_2) \in u(S) \subset S$ car S stable.

Donc $u(x) \in S$.

c) On a vu que $\text{Im}\, u \subset S$.

Or $\dim \text{Im}\, u = \dim S$ (et ce sont des dimensions finies)

donc $\text{Im}\, u = S$.

3 a) Si on note u^* l'adjoint de u par rapport au produit hermitien, alors u est <u>normal</u> ssi $u u^* = u u^*$.

b) Le théorème spectral dit que tout endomorphisme normal (d'un e.v. de dim^n finie) admet une base orthonormée de vecteurs propres

c) u est <u>nilpotent</u> ssi $\exists k \in \mathbb{N}^*$ t.q. $u^k = 0$

Si u est normal, soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ la matrice de u dans une base de vecteurs propres. Alors la matrice de u^k est $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$. En choisissant k l'indice de nilpotence (par exemple) on trouve $\lambda_j^k = 0$, $1 \leq j \leq n$, donc $\lambda_j = 0$, donc $D = 0$, donc $u = 0$.

4. a) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = -x$$

$$\iff \forall i, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = -x_i$$

$$\iff \forall i, \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j = -x_i$$

$$\iff \forall i, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 0$$ (toutes les équations se réduisent à la même)

Donc $H = \{x : \sum_{j=1}^{n} x_j = 0\}$

c'est un hyperplan (défini par 1 équation linéaire non nulle)

donc $\dim H = n-1$.

b) A est symétrique, donc définit un endomorphisme symétrique (cas particulier de "normal") donc diagonalisable dans une base orthonormée.

c) Il y a au moins un vecteur propre qui n'est pas dans H et il doit y être orthogonal puisque 2 vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Or $\dim H^\perp = n - \dim H = 1$.

Donc $H^\perp$ est un sous espace propre.

On voit que $H^\perp = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

et on calcule

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} 1\right)_{1\leq i\leq n} = \begin{pmatrix}n-1\\n-1\\\vdots\\n-1\end{pmatrix} = (n-1)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

Donc la valeur propre associée est $n-1$

La matrice de l'endomorphisme associé à A dans une base diagonale donnée par $\left(\text{base de } H, \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$ est :

$$D = \begin{pmatrix}-1 & & & & 0\\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ 0 & & & & n-1\end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad \text{où } P^{-1} = {}^tP$$

NB – on peut aussi trouver le vecteur propre $\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ par inspection

· on peut aussi trouver la val. p. $n-1$ en exploitant le fait que $\operatorname{Tr} A = 0$.

d) Pour calculer la signature de Q on peut considérer toute matrice de la forme ${}^tPAP$, donc D convient. Donc la signature de Q est $(1, n-1, 0)$.

e) On sait que $D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

Il reste à trouver une base orthonormée de $H = \{ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$.

une base (quelconque) est donnée par

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} =: \{ v_1, v_2 \}$$

Appliquons le procédé de Gram-Schmidt :

$$v_2' = v_2 + \lambda v_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1-\lambda \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1, v_2' \rangle = \lambda - 1 + \lambda + 0 = 2\lambda - 1,$$

donc $\lambda = \frac{1}{2}$ produit un vecteur orthogonal

$$v_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \text{NB: } \|v_2'\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$$

On normalise : $v_1'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

f) d'après d), signature de $Q = (1, 2, 0)$.

Dans la base $\{ v_1'', v_2'', v_3'' \}$ avec $v_3'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

avec les coordonnées (x_1', x_2', x_3')

$$Q(x) = -{x_1'}^2 - {x_2'}^2 + 2{x_3'}^2.$$

$$= -\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{\sqrt{6}} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}} \right)^2$$

$$= -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{6}(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + x_3)^2$$

(on a utilisé $x_j' = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, v_j'' \right\rangle$). NB - on peut aussi utiliser la méthode des carrés de Gauss.

D'après la signature, l'indice de Witt (dim^n des s.e.v. isotropes maximaux) est $\min(1, 2) = 1$: ce sont des droites vectorielles.

g) Il suffit de trouver les vecteurs isotropes. Donc $2x_3'^2 = x_1'^2 + x_2'^2$, avec $(x_1', x_2') \neq (0,0)$.

h) On veut trouver des plans

$$P = \{ v : a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3' = 0 \}$$

tels que $\operatorname{sign} Q|_P = (1, 1, 0)$.

ou de façon équivalente que $Q|_P$ est surjective sur $\mathbb{R}$. Donc on doit avoir un vecteur isotrope dans P, c'est à dire $\exists (x_1, x_2) \neq (0,0)$

tels que $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = 0$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

donc $$|a_3| = \left| - \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}} \right| \leq \sqrt{2(a_1^2 + a_2^2)}.$$

Si on avait égalité, on aurait pour tout $v \in P$, $x_3' = - \dfrac{a_1 x_1' + a_2 x_2'}{a_3}$

$$\iff x_3' = - \frac{a_1 x_1' + a_2 x_2'}{\pm \sqrt{2(a_1^2 + a_2^2)}}$$

Donc $Q(v) = -x_1'^2 - x_2'^2 + 2x_3'^2$

$$= -(x_1'^2 + x_2'^2) + \frac{(a_1 x_1' + a_2 x_2')^2}{a_1^2 + a_2^2}$$

Par Cauchy Schwarz

$$\leq -(x_1'^2 + x_2'^2) + \frac{(a_1^2+a_2^2)(x_1'^2+x_2'^2)}{a_1^2+a_2^2}$$

$$\leq 0,$$

et donc Q ne serait pas surjective.

Donc on doit avoir $|a_3| < \sqrt{2(a_1^2+a_2^2)}$.

Alors $Q(v) < 0$ si $x_3' = 0$, $x_1'^2 + x_2'^2 > 0$

et si $x_1' = +a_1$, $x_2' = +a_2$,

$$x_3' = \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_3}$$

$$2x_3'^2 > 2 \times \frac{(a_1^2+a_2^2)^2}{2(a_1^2+a_2^2)} > \underbrace{a_1^2 + a_2^2}_{= x_1'^2 + x_2'^2}$$

Donc $Q(v) > 0$, on a bien la surjectivité.