1\. a) Soit $A > 0$. Alors $\overline{D}(0,A)$ est compact, donc il existe $B > 0$ tel que $f^{-1}(\overline{D}(0,A)) \subset \overline{D}(0,B)$.
Donc si $|z| > B$, alors $|f(z)| > A$, car sinon $z = f^{-1}(f(z)) \in \overline{D}(0,B)$: contradiction.
On a bien montré : $\forall A>0, \exists B>0$ tq $|z|>B \Rightarrow |f(z)|>A$.
Donc $\lim_{z\to 0} |f\circ I(z)| = \lim_{z\to 0} |f(\frac{1}{z})| = \lim_{z'\to\infty} |f(z')| = \infty$: la fonction $f\circ I$ admet un pôle en 0.
Donc $f(\frac{1}{z}) = \sum_{k\geq -m} \tilde{a}_k z^k$, pour $|\frac{1}{z}| \leq r_0$
D'autre part f est analytique sur $\mathbb{C}$, donc $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$. Mais $a_k = \tilde{a}_{-k}$ par idenfication, donc $a_k = 0$ pour $k > m$:
f est un polynôme.

b) $f_1(z) := I\circ f\circ I(z)$ est une fonction analytique qui vérifie $f_1(0)=0$. Comme elle doit être bijective au voisinage de 0, $f_1'(0)\neq 0$.
Or $f_1(z) = \dfrac{1}{a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_m}{z^m}} = z^m \dfrac{1}{a_m + z a_{m-1} + \cdots + z^m a_0}$,
avec $a_m \neq 0$, donc $= z^m h(z)$, h analytique, $h(0)\neq 0$,
donc $m = 1$, et $a_1 \neq 0$ sinon f serait constante.
(NB – on peut aussi considérer f globalement – un polynôme bijectif sera de degré 1).

c) Si $f(\infty)=\infty$, alors par la bijectivité de f, $f(z)\in\mathbb{C}, \forall z\in\mathbb{C}$ et $h = id$ convient.
Si $f(\infty) = c \in \mathbb{C}$, alors $h(z) = \dfrac{1}{z-c}$ convient, car $h\circ f(\infty) = \infty$ et on applique le même raisonnement à $h\circ f$.

d) Toute homographie $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc \neq 0$ est une bijection de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$ (vu en TD, Analyse 1).

Réciproquement, si f est une bijection holomorphe de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$, $\exists\, h$ tq. $h \circ f(z) = az+b$, donc $f(z) = h^{-1}(az+b)$ qui est à nouveau une homographie.

2. a) Si on pose $a = f(0)$, alors
$\varphi_a \circ f(0) = \varphi_a(a) = 0$.

b) D'après le lemme de Schwarz, $|f_1(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. D'autre part f_1 est une bijection holomorphe de $\mathbb{D}$ et $f_1^{-1}(0) = 0$, donc $|f_1^{-1}(w)| \leq |w|$ $\forall\, w \in \mathbb{D}$. Si on prend $w = f(z)$, on trouve $|z| \leq |f_1(z)|$, $\forall\, z \in \mathbb{D}$.

Donc $\left|\dfrac{f_1(z)}{z}\right| = 1$ pour $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$,
donc $\dfrac{f_1(z)}{z}$ est constante (par Schwarz) :
$f_1(z) = e^{i\theta} z$ pour un certain θ.

$$\varphi_a(f(z)) = e^{i\theta} z \Rightarrow f(z) = \varphi_a(e^{i\theta} z) = \frac{a - e^{i\theta} z}{1 - \bar{a} e^{i\theta} z}$$

$$= e^{i\theta} \frac{a e^{-i\theta} - z}{1 - \overline{a e^{-i\theta}}\, z} = e^{i\theta} \varphi_{a e^{-i\theta}}(z).$$

Finalement : toute bijection holomorphe de $\mathbb{D}$ peut s'écrire $z \longmapsto e^{i\beta} \varphi_b(z)$ pour un certain $\beta \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{D}$.

3. On veut toujours que $f_1 = \varphi_b \circ f \circ \varphi_a$ vérifie $f_1(0) = 0$. On prend donc $b = f(a)$, et alors $f_1(0) = \varphi_{f(a)}(f(a)) = 0$.

Calculons $f_1'(0)$:

$$f_1'(z) = \varphi_b'(f \circ \varphi_a(z)) \cdot f'(\varphi_a(z)) \cdot \varphi_a'(z)$$

$$f_1'(0) = \varphi_{f(a)}'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot \varphi_a'(0).$$

Or $\varphi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-z\bar{a}} = (a-z)(1+z\bar{a} + O(z^2))$ (en faisant un DL)

$$= a - z(1-|a|^2) + O(z^2),$$

d'où $\varphi_a'(0) = -(1-|a|^2)$ et $\varphi_a'(a) = (\varphi_a^{-1})'(\varphi_a(0))$

$$= \frac{1}{\varphi_a'(\varphi_a^{-1}(\varphi_a(0)))} = \frac{1}{\varphi_a'(0)} = \frac{-1}{1-|a|^2}.$$

On en déduit ~~(par le le~~

$$f_1'(0) = \frac{(1-|a|^2) f'(a)}{1-|f(a)|^2}, \text{ or } |f_1'(0)| \leq 1,$$

par le lemme de Schwarz

d'où l'inégalité demandée.

Si on a égalité, alors le cas d'égalité dans le lemme de Schwarz montre que $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$ tq. $f_1(z) = e^{i\theta} z$ et donc

$f = \varphi_b \circ f_1 \circ \varphi_a$ est une homographie qui est une bijection de $\mathbb{D}$. Réciproquement si f est une bijection de $\mathbb{D}$, f_1 l'est aussi et $|f_1'(0)| = 1$ donc on a égalité.

[Remarque : j'ai fait exprès de ne jamais dériver un quotient.]