L2 PS Mathématiques 2017-18
Algèbre, examen terminal
Solution

I

1. a) Q_t est dégénérée ssi $\det M_t = 0$.

Calculons $\det M_t$. La matrice se décompose en deux blocs, donc

$$\det M_t = \begin{vmatrix} \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4}(t-2) \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(t-2) & \frac{1}{4}t + \frac{1}{2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{t}{2} - 1 & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & \frac{t}{2} - 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\left[(3t-2)(t+2) - 3(t-2)^2\right] \times \frac{1}{4}\left[(t-2)^2 - t^2\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[3t^2 + 4t - 4 - 3t^2 + 12t - 12\right] \times \frac{1}{4}(t-2-t)(t-2+t)$$

$$= -(t-1)^2.$$

Donc $\det M_t = 0 \iff t = 1$.

b) Quand $t \neq 1$, $\det M_t < 0$, donc M_t admet des valeurs propres de signes opposés, donc il existe v_+ tq. $Q_t(v_+) > 0$ et v_- t.q. $Q_t(v_-) < 0$. On sait alors qu'il existe $v_0 \in \mathrm{Vect}(v_+, v_-)$ tel que $Q_t(v_0) = 0$, $v_0 \neq 0$.

2. a) M_t est symétrique, donc d'après le théorème de l'axe principal, M_t est diagonalisable.

b) Les valeurs propres de u_t sont les racines du polynôme caractéristique. Calculons donc

$$\det(XI - M_t) = \begin{vmatrix} \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} - X & \frac{\sqrt{3}}{4}(t-2) \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(t-2) & \frac{1}{4}t + \frac{1}{2} - X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{t}{2} - 1 - X & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & \frac{t}{2} - 1 - X \end{vmatrix}$$

$$= \left((t-1) - X\left(\frac{3t}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\right) + X^2 \right) \left(\left(\frac{t}{2} - 1 - X\right)^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 \right)$$

$$= \left(X^2 - tX + t - 1\right)\left(\frac{t}{2} - 1 - X - \frac{t}{2}\right)\left(\frac{t}{2} - 1 - X + \frac{t}{2}\right)$$

$$= (X-1)(X+1-t)(X+1)(X+1-t)$$

$$= (X-1)(X+1)(X+1-t)^2.$$

Donc $Sp(u_t) = \{-1, +1, t-1\}$.

c) $Sp(u_0) = \{-1, +1\}$ et u_0 est diagonalisable, donc son polynôme minimal est scindé à racines simples, d'où $m_{u_0}(X) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1$.

$Sp(u_1) = \{-1, 0, +1\}$, et à nouveau $m_{u_1}(X)$ est à racines simples,

$$m_{u_1}(X) = (X-1)X(X+1) = X^3 - X.$$

3. a) Par définition, $\mathrm{rad}(Q_1) = \{x \in \mathbb{R}^4 : \text{s.t. } \forall y \in \mathbb{R}^4,\ Q_t(x,y) = 0\}$

(résultat du cours) $= \mathrm{Ker}\, u_1$.

On cherche donc x tq. $u_1(x) = 0$.

D'où les équations
$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}x_2 = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 0 \\ -\frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{2} = 0 \\ \frac{x_3}{2} - \frac{x_4}{2} = 0 \end{cases}$$

$\iff \quad x_1 = \sqrt{3}x_2$ et $x_3 = x_4$.

D'où $\mathrm{Ker}\, u_t = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- Les vecteurs isotropes de Q_1 sont les x tels que

$$q_1(x) := Q_1(x, x) = 0$$

Or $Q_1(x,x) = \frac{1}{4}\left(x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(x_3^2 + x_4^2 - 2x_3x_4\right)$

$= \frac{1}{4}\left(x_1 - \sqrt{3}x_2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x_3 - x_4\right)^2$.

Donc $Q_1(x,x) = 0 \iff \begin{cases} x_1 - \sqrt{3}x_2 = \sqrt{2}(x_3 - x_4) \\ \text{ou} \\ x_1 - \sqrt{3}x_2 = -\sqrt{2}\,(x_3 - x_4). \end{cases}$

(union de deux hyperplans).

b) Matrice de Q_0 : $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

valeurs propres = -1 (multiplicité 3) et $+1$ (multiplicité 1)

Le plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est hyperbolique ($Q_1(e_1) < 0$ et $Q_1(e_2) < 0$) et le plan $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$ est anisotrope ($Q_1|_{\mathrm{Vect}(e_3,e_4)}$ est définie négative) et ils sont orthogonaux.