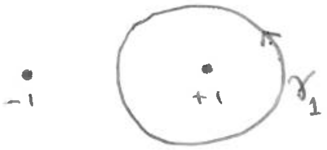
L3 Parcours Spécial - analyse Complexe 2
Contrôle terminal, 9.01.2018 - Solution

1.



barème appelé à changer !
1,5

a) D'après la formule des résidus, $\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;1)$.

Ici $f(z) = \dfrac{1}{z+1} \cdot \dfrac{1}{z-1}$ et $z \mapsto \dfrac{1}{z+1}$ est analytique au voisinage de 1, donc $\operatorname{Res}(f;1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

et $\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \pi i \,(\neq 0)$.

Comme l'intégrale de f sur un chemin fermé n'est pas nulle, f ne peut pas être la dérivée d'une fonction analytique.

2

b) À nouveau $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) = 2\pi i$ car $\frac{1}{z} \in \mathcal{A}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$. On peut aussi faire un calcul direct. Si γ_2 était homotope dans Ω_2 à $\{2\}$, alors on aurait $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz = \int_{\{2\}} \frac{1}{z}\, dz = 0$ (une intégrale sur un chemin constant est toujours nulle). Donc γ_2 est un chemin fermé non homotope à un chemin constant et donc Ω_2 n'est pas simplement connexe.

Comme l'intégrale de f_1 sur un chemin fermé n'est pas nulle, f_1 ne peut pas être la dérivée d'une fonction analytique.

1,5

c) Le domaine de définition de θ_1 est

$$\{z \in \mathbb{C} : z-1 \in \mathbb{C}\setminus[0,+\infty[\} = \mathbb{C}\setminus[1,+\infty[$$

De même le domaine de θ_2 est

$$\{z \in \mathbb{C} : z+1 \in \mathbb{C}\setminus[0,+\infty[\} = \mathbb{C}\setminus[-1,+\infty[.$$

Donc a priori $\theta_2 - \theta_1$ est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{C}\setminus[-1,+\infty[\subsetneq \Omega_2$.

$\Omega_2 \setminus \mathcal{D} =]1, +\infty[$: il reste à voir si on peut prolonger $\theta_2 - \theta_1$ à cette demi droite. Soit $x \in]1, +\infty[$.

On sait que $\lim\limits_{\substack{z \to x \\ \Im z > 0}} \theta_1(z) = 0$, et $\lim\limits_{\substack{z \to x \\ \Im z > 0}} \theta_2(z) = 0$;

et que $\lim\limits_{\substack{z \to x \\ \Im z < 0}} \theta_1(z) = 2\pi$, et $\lim\limits_{\substack{z \to x \\ \Im z < 0}} \theta_2(z) = 2\pi$.

Donc $\lim\limits_{\substack{z \to x \\ \Im z > 0}} \left(\theta_2(z) - \theta_1(z)\right) = 0 = \lim\limits_{\substack{z \to x \\ \Im z < 0}} \left(\theta_2(z) - \theta_1(z)\right)$

et on peut prolonger la fonction par continuité (avec la valeur 0) à $]1, +\infty[$.

1 d) D'après la définition de g, θ_3 est un argument pour $\frac{z+1}{z-1}$ (i.e. $e^{-i\theta_3(z)} \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}_+ \ \forall z \in \Omega_2$)

et donc $\exp(g(z))$ a les mêmes module et argument que $\frac{z+1}{z-1}$, donc est égal à $\frac{z+1}{z-1}$.

g est continue car $t \mapsto \log t$ est continue sur $]0, +\infty[$ et θ_3 est continue.

1,5 e) On veut montrer que $\dfrac{g(z+h) - g(z)}{h}$ admet une limite

Or $\dfrac{\exp(g(z+h)) - \exp(g(z))}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{2 + z - 1}{z-1}\right) = \dfrac{-2}{(z-1)^2}$

D'autre part $\dfrac{a-b}{e^a - e^b} = \dfrac{a-b}{(e^{a-b} - 1)e^b} \xrightarrow[a-b \to 0]{} \dfrac{1}{e^b} \in \mathbb{C}$.

(Car on sait que $\lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y \in \mathbb{C}}} \dfrac{e^y - 1}{y} = 1$, par dérivabilité de l'exponentielle par exemple)

Comme g est continue, $\lim\limits_{h \to 0} \left(g(z+h) - g(z)\right) = 0$

et on peut appliquer ce qui précède à $a = g(z+h)$, $b = g(z)$.

Finalement $g'(z)$ existe et vaut $e^{-g(z)} \dfrac{(-2)}{(z-1)^2} = \dfrac{-2(z-1)}{(z+1)(z-1)^2}$

$$= \frac{-2}{(z+1)(z-1)}.$$

1 f) (Calculs déjà donnés ci-dessus) $g'(z) = \frac{-2}{z^2-1}$.

Donc f admet pour primitive $-\frac{1}{2}g(z)$ (par exemple).

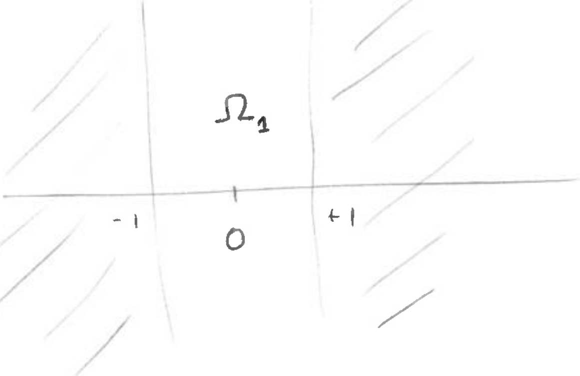
2) a) La conclusion du théorème de Rouché est
1 que f_1 et f_2 ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicités) dans $D(a,r)$.

b) On pose $f_1 = f$, $f_2 = -g$.
1 Alors $|f_1+f_2| = |f-g| < |f| \leq |f|+|-g|$, donc les hypothèses du théorème de Rouché sont vérifiées.

2 c) D'après le théorème des zéros isolés, si $f(a)=0$, $\exists\ r_1>0$ tq $D(a,r_1)\subset\Omega_1$ et $\forall z\in D(a,r_1)\setminus\{a\}$, $f(z)\neq 0$. On prend $0<r<r_1$.
Alors $\forall z\in \overline{D}(a,r)\setminus\{a\}$, $z\in\Omega_1$ et $f(z)\neq 0$.
En particulier, $\forall z\in\partial D(a,r)$, $|f(z)|>0$.
Comme $\partial D(a,r)$ est compact et $|f|$ continu,
$$\inf_{z\in\partial D(a,r)} |f(z)| = \min_{z\in\partial D(a,r)} |f(z)| = |f(z_0)| > 0$$
(pour un certain $z_0\in\partial D(a,r)$).
• Si $f(a)\neq 0$, on fait un simple argument de continuité.

1,5 d) ~~Pour n > N~~ Comme $\partial D(a,r)$ est un compact, f_n converge uniformément vers f sur $\partial D(a,r)$ et donc $\exists N\in\mathbb{N}$ tq. $\forall n\geq N$, $\forall z\in\partial D(a,r)$,
$|f(z)-f_n(z)| \leq \frac{\delta}{2} < \delta \leq |f(z)|$. D'après la question b) f et f_n ont le même nombre de zéros sur $D(a,r)$. Or $f_n(z)\neq 0$ pour tout $z\in D(a,r)$, donc $f(z)\neq 0$ également, et $f(a)\neq 0$.
~~(Ceci est vrai dans un voisinage de tout $a\in\Omega_1$).~~

3)



a) $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, Ω est convexe, donc simplement connexe, donc d'après le Théorème de Riemann
1 il existe une unique bijection holomorphe φ de Ω dans $\mathbb{D}$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) > 0$.

b) φ étant une bijection, $\mathbb{D} \subsetneq \Omega_1 \Rightarrow \varphi(\mathbb{D}) \subsetneq \varphi(\Omega_1) = \mathbb{D}$.
Or $\varphi(0) = 0$, donc le lemme de Schwarz
1 implique $|\varphi'(0)| \leq 1$ et le cas d'égalité montre qu'on ne peut pas avoir $|\varphi'(0)| = 1$ (sinon φ serait une rotation ~~donc~~, donc bijective sur $\mathbb{D}$). Or $\varphi'(0) > 0$,
donc $0 < \varphi'(0) < 1$.

0,5 c) $\varphi_1(z) = i\frac{\pi}{2} z$ convient.

1,5 d) $\Omega_3 = \{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \}$.
Donc l'application $z \overset{\varphi_2}{\longmapsto} \exp(z)$ vérifie $\varphi_2(z) \in \Omega_3$.
D'autre part $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, or dans Ω_2, $\operatorname{Re} z$ parcourt toute la droite réelle, donc toute valeur du module est atteinte.
Plus précisément : si $w \in \Omega_3$, alors $\exists! \, \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $w = |w| e^{i\theta}$, et donc $w = \exp(\log|w| + i\theta)$, avec $\log|w| + i\theta \in \Omega_2$: on a bien un point z de Ω_2 tq $e^z = w$ et il est unique car $e^z = e^{z'} \Rightarrow$
$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z'$ et $\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z' \in 2\pi i \mathbb{Z}$.

0,5 e) $\varphi_3(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ convient.

1,5 f) $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 (z) = \varphi_3 \circ \varphi_2 \left(i\frac{\pi}{2} z \right) = \varphi_3 \left(\exp\left(i\frac{\pi}{2} z\right) \right)$

$$= \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{2}z\right) - 1}{\exp\left(i\frac{\pi}{2}z\right) + 1} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}z} - 1}{e^{i\frac{\pi}{2}z} + 1}.$$

$\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 (0) = \varphi_3 \circ \varphi_2 (0) = \varphi_3(1) = 0.$

$\left(\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1\right)'(0) = \left(\varphi_3 \circ \varphi_2\right)'(\varphi_1(0)) . \varphi_1'(0)$

$= \left(\varphi_3 \circ \varphi_2\right)'(0) . i\frac{\pi}{2} = \varphi_3'(\varphi_2(0)) . \varphi_2'(0) . i\frac{\pi}{2}$

$= \varphi_3'(1) . 1 . i\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} . i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{4}.$

On pose donc $\varphi(z) = -i\, \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 = -i \dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}z} - 1}{e^{i\frac{\pi}{2}z} + 1}$,

et on a $\varphi'(0) = \frac{\pi}{4} \left(\in]0, 1[, \text{ comme prévu} \right).$