Contrôle Continu Analyse Complexe 2 27-11-2017

Solution

1 a) $\cos z - 1 = \sum_{k\geq 1} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$

Donc $\frac{\cos z - 1}{z^2} = \sum_{k\geq 1} (-1)^k \frac{z^{2k-2}}{(2k)!} = \sum_{k\geq 0} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k}}{(2k+2)!}$

en particulier $\lim_{z\to 0} \frac{\cos z - 1}{z^2} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{C}$ donc la fonction présente une singularité éliminable en 0.
Donc $\mathrm{Res}(f;0) = 0$.

b) De la même façon $\frac{\cos z - 1}{z^3} = \sum_{k\geq 0} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k-1}}{(2k+2)!} = \frac{-1}{2z} + \cdots$

Donc la fonction admet un pôle en 0, d'ordre 1, et le résidu $\mathrm{Res}(f;0) = -\frac{1}{2}$.

c) $\frac{\cos z - 1}{z^4} = -\frac{1}{2z^2} + \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+4)!}$, donc la fonction admet un pôle d'ordre 2 en 0 et $\mathrm{Res}(f;0) = 0$.
(pas de terme en $\frac{1}{z}$).

d) $\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{R}}} f(z) = 0$, $\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in i\mathbb{R}_*}} f(z) = \lim_{y\to 0} i^3 y^3 \left(\mathrm{Ch}\left(\frac{1}{y}\right) - 1\right)$.

Cette dernière limite n'existe pas, mais $|f(z)| \to \infty$ dans ce cas.

Donc f n'admet pas de limite quand $z \to 0$ et on n'a pas non plus $|f(z)| \to \infty$: c'est une singularité exceptionnelle.

Développement en série de Laurent : $\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{z^{-2k}}{(2k)!}$

Donc $f(z) = \sum_{k\geq 1} (-1)^k \frac{z^{3-2k}}{(2k)!} = -z + \frac{1}{4z} + \sum_{k\geq 3} (-1)^k \frac{z^{3-2k}}{(2k)!}$,

donc $\mathrm{Res}(f;0) = \frac{1}{4}$.

2 a) Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ telle que ~~tel que~~ pour tout triangle T avec $\hat{T} \subset \Omega$ (enveloppe convexe des 3 côtés du triangle) on ait $\int_T f(z)\, dz = 0$, alors $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

b) $\gamma([a,b])$ est un compact (car γ est continue), contenu dans Ω, donc $\sup_{\gamma([a,b])} |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or $\left|\int_\gamma f(z)\, dz - \int_\gamma f_n(z)\, dz\right| \leq \left|\int_\gamma (f_n(z) - f(z))\, dz\right|$

$\leq l(\gamma) . \sup_{\gamma([a,b])} |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) → Soit D un disque contenu dans Ω tel que $\overline{D} \subset \Omega$
Soit T un triangle tel que $\hat{T} \subset D$

alors d'après b), $\int_T f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_T f_n(z)\, dz = 0$, d'après le théorème de Cauchy dans le cas des convexes.

D'autre part $\overline{D}$ est compact donc f est continue sur $\overline{D}$, comme limite uniforme.

Donc d'après le théorème de Morera, $f \in \mathcal{A}(D)$.

Ceci est vrai en particulier dans un voisinage de tout $a \in \Omega$ (en prenant par ex. $D = D(a, \frac{1}{2}\mathrm{dist}(a, \mathbb{C}\setminus\Omega))$)

donc $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

3) a) Si $f(z) = F'(z)$,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}(F\circ\gamma)(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

b) (1) Si $n \neq -1$, $F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$.

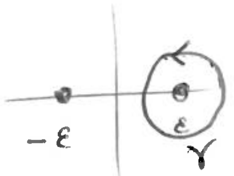
si $n = -1$, prenons $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Alors $\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0 = \gamma(2\pi) - \gamma(0)$,

donc $\frac{1}{z}$ n'a pas de primitive.

(2) Si $\varepsilon = 0$ c'est le cas $n = -2 \neq -1$ de (1),

donc $F(z) = -\frac{1}{z}$.



si $\varepsilon > 0$, $\gamma(t) = \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;\varepsilon) = \frac{2\pi i}{2\varepsilon} \neq 0$,

donc f n'a pas de primitive.

(3) (certains des calculs ne servent que pour (4))

$$\operatorname{Res}(f;1) = \frac{1^2+3}{(1+1)^2} = 1$$

$$\operatorname{Res}(f;-1) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2+3z}{z-1}\right)\Big|_{z=-1} = \left(\frac{2z+3}{z-1} - \frac{z^2+3z}{(z-1)^2}\right)\Big|_{z=-1}$$

$$= \frac{+1}{-2} - \frac{1-3}{(-2)^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

On peut calculer la décomposition en éléments simples de f : $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{(z+1)^2} + \frac{\gamma}{z-1}$, $\gamma = \operatorname{Res}(f;1) = 1$,

$\alpha = \operatorname{Res}(f;-1) = 0$, $f(0) = \beta - \gamma \Rightarrow \beta = \gamma = 1$,

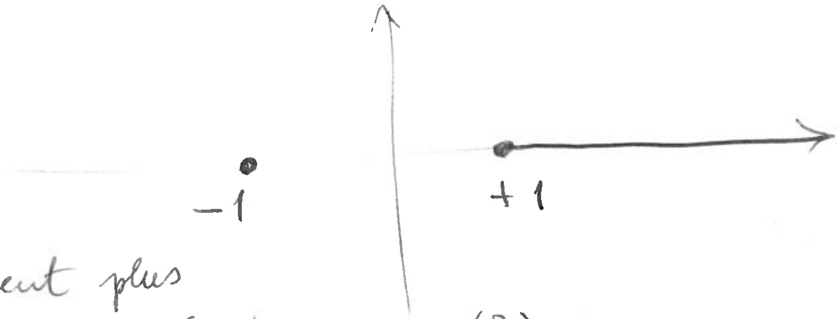
donc $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z-1}$ (d'autres méthodes sont possibles).

NB : on retrouve ainsi plus facilement $\operatorname{Res}(f;-1)$.

Si on prend la courbe $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;1) \neq 0$, donc f n'a pas de primitive.

(4) Ω :



ici on ne peut plus utiliser la courbe γ du point (3).

Par contre, $\mathrm{Log}(z-1)$ peut être défini en choisissant $\arg(z-1) \in \,]0, 2\pi[$

! et $\frac{d}{dz}\left(\mathrm{Log}(z-1)\right) = \frac{1}{z-1}$.

Donc $F(z) = -\frac{1}{z+1} + \mathrm{Log}(z-1)$ fournit une primitive de f.