L3 Parcours spécial

Contrôle terminal 9.01.2018

Solution

1. $f(z) = z^m e^{\frac{1}{z}}$ a une singularité isolée en 0.

Res $(f, 0)$ est le coefficient du terme de degré -1 dans le développement de f en série de Laurent autour de 0.

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k}$$

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} z^{m-k} = \sum_{p \leq 0} \frac{1}{(m-p)!} z^p,$$

donc $\mathrm{Res}(f, 0) = \dfrac{1}{(m+1)!}$.

D'après le Théorème des résidus,

$$\int_\gamma z^m e^{\frac{1}{z}} dz = \frac{2\pi i}{(m+1)!}.$$

2. a) si $f \in Hol(\Omega)$, f non constante, alors $\forall\, z \in \Omega$, $\exists\, r > 0$ tel que $D(f(z), r) \subset f(\Omega)$.

b) Supposons que $\mathrm{Re}\, f$ ait un maximum local en z_0 : alors $\exists\, r_1 > 0$ tel que

$$\mathrm{Re}\, f(z_0) = \max\{\mathrm{Re}\, f(z) : z \in D(z_0, r_1)\}$$

Appliquons le théorème de l'application ouverte avec $\Omega = D(z_0, r_1)$: il existe $r_2 > 0$ tel que $D(f(z_0), r_2) \subset f(\Omega)$.

Mais alors $f(z_0) + \frac{r_2}{2} \in D(f(z_0), r_2)$ et donc $f(z_0) + \frac{r_2}{2} = f(w)$, $w \in D(z_0, r_1)$ et $\operatorname{Re} f(w) = \operatorname{Re} f(z_0) + \frac{r_2}{2}$: Contradiction.

Pour $|f|$ la démonstration est presque la même, on remarque juste que f non constante $\Rightarrow$ si $|f(z_0)| = \max\{|f(z)| : z \in D(z_0, r_1)\}$ alors $|f(z_0)| > 0$ et on prend r_2 comme avant et $\left(1 + \frac{r_2}{2} \frac{1}{|f(z_0)|}\right) f(z_0) = f(w)$ avec $|f(w)| > |f(z_0)|$.

3. (a) f est un polynôme de degré 5 et donc a 5 zéros dans $\mathbb{C}$.

Posons $f_1(z) = z^5$, $g_1(z) = 49z + 64$.

Alors pour $|z| = 3$, $|f_1(z)| = 3^5 = 243$,

$|g_1(z)| \leq 49 \times 3 + 64 = 211 < 243$,

donc le théorème de Rouché implique que $f = f_1 + g_1$ a le même nombre de zéros que f_1 dans $D(0,3)$.

Or f_1 a un zéro de multiplicité 5 au point 0, donc 5 zéros, donc f aussi.

Par conséquent f ne peut avoir aucun zéro supplémentaire hors de $D(0,3)$.

(b) Sur $\bar{D}(0,1)$, $|f(z)| \geq |64 - |49z + z^5|$

$$\geq 64 - |49z| - |z|^5 \geq 64 - 49 - 1 = 14 > 0$$

Posons $f_2(z) = 49z$, $g_2(z) = z^5 + 64$.

Alors $|f_2(z)| = 49 \times 2 = 98$

$|g_2(z)| \leq |z|^5 + 64 = 32 + 64 = 96 < 98$.

Donc f a le même nombre de zéros que f_2 dans $D(0,2)$, soit 1 zéro, qui doit être extérieur à $\bar{D}(0,1)$.

(c) Pour avoir un zéro multiple z, on devrait avoir $f(z) = f'(z) = 0$

$f'(z) = 5z^4 + 49$, donc $f'(z) = 0 \Rightarrow z^4 = -\frac{49}{5}$

$\Rightarrow z^5 = -\frac{49}{5} z$. Donc $f(z) = -\frac{49}{5} z + 49z + 64$

$= 64 + \frac{4}{5} \cdot 49 z$. Si $f(z) = 0$, $z = -\frac{80}{49}$

Mais $\left(-\frac{80}{49}\right)^4 > 0$ donc est différent de $-\frac{49}{5}$: il ne peut pas y avoir de zéro multiple de f.

4. a) Supposons que $(\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega) \cap \{|w| = R\} = \emptyset$.

Alors $U_1 := \{|w| < R\}$ et $U_2 := \{|w| > R\} \cup \{\infty\}$ sont des ouverts de $\hat{\mathbb{C}}$ qui sont disjoints et recouvrent $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. De plus $z_0 \in U_1 \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ et $\infty \in U_2 \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$: donc aucune des 2 traces de ces ouverts sur $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ n'est vide, et $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ n'est pas connexe = contradiction.

b) Si γ est un cycle dans Ω, son image est compacte et donc contenue dans $\overline{D}(0, R_0)$ pour un certain R_0.

Prenons $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ avec $|w| = R > R_0$ (il en existe d'après (a)) alors (avec $\ell(\gamma)$ = longueur de γ)

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - w} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \ell(\gamma) \frac{1}{R - R_0} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0,$$

donc on peut trouver w tel que

$|\mathrm{Ind}(\gamma; w)| < \frac{1}{2}$ et donc $= 0$ puisque $\mathrm{Ind}(\gamma, w) \in \mathbb{Z}$.

L'indice est constant sur une composante connexe de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, donc $= 0$ pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

c) Sur tout chemin fermé γ dans Ω, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ d'après le théorème de Cauchy. Donc si on définit $F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta$ où γ_z est un chemin reliant z_0 à z, la définition ne dépend pas du chemin et produit une primitive de f.

5. a) $z \in \mathbb{R} \Rightarrow |z-a|^2 = (z - \mathrm{Re}\, a)^2 + (\mathrm{Im}\, a)^2$

et $|z-\bar{a}|^2 = (z - \mathrm{Re}\, a)^2 + (-\mathrm{Im}\, a)^2 = |z-a|^2$,

donc $|\varphi_a(z)| = 1$.

$z \in H \Rightarrow z = x + iy$ avec $y > 0$

$|z-a|^2 = (x - \mathrm{Re}\, a)^2 + (y - \mathrm{Im}\, a)^2$

$|z-\bar{a}|^2 = (x - \mathrm{Re}\, a)^2 + (y + \mathrm{Im}\, a)^2$, donc

$|z-\bar{a}|^2 - |z-a|^2 = 4\, y \cdot \mathrm{Im}\, a > 0$,

donc $|\varphi_a(z)| < 1$.

b) $\varphi_a \circ f(0) = \varphi_a(a) = \dfrac{a-a}{a-\bar{a}} = 0$.

$z \in \mathbb{D} \Rightarrow |\varphi_a(f(z))| < 1$ car $f(z) \in H$,

donc on peut appliquer le Lemme de Schwarz :

$1 > |(\varphi_a \circ f)'(0)| = |\varphi_a'(f(0)) \cdot f'(0)| = |\varphi_a'(a)|\, |f'(0)|$.

Or $\varphi_a(z) = 1 - \dfrac{a-\bar{a}}{z-\bar{a}}$, donc $\varphi_a'(z) = \dfrac{a-\bar{a}}{(z-\bar{a})^2}$ et

$\varphi_a'(0) = \dfrac{1}{a-\bar{a}} = \dfrac{1}{2i\, \mathrm{Im}\, a}$,

donc $1 \geq \dfrac{|f'(0)|}{2\, \mathrm{Im}\, a} \Rightarrow |f'(0)| \leq 2\, \mathrm{Im}\, a$.

L'égalité est atteinte si $\varphi_a(f(z)) = e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$,

autrement dit $f(z) - a = e^{i\theta} z\, (f(z) - \bar{a})$

$\Longleftrightarrow f(z) = \dfrac{-\bar{a} e^{i\theta} z + a}{1 - e^{i\theta} z}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Donc $\max\{|f'(0)| : f(\mathbb{D}) \subset H,\ f(0) = a\} = 2\, \mathrm{Im}\, a$.

On remarque que les fonctions extrémales sont des bijections.