ANALYSE COMPLEXE 2, PARCOURS SPÉCIAL L3 RÉSUMÉ DE COURS

PASCAL THOMAS

Pré-requis : cours Analyse Complexe 1.

6. Équivalence des définitions des fonctions holomorphes.

6.1. **Primitives au sens complexe.** Rappels :
Différentiabilité complexe, dérivées par rapport à z et $\bar{z}$.
Intégration sur un chemin.
On note $\ell(\gamma)$ la longueur du chemin.

Lemme 1.
$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \max_{\gamma([a,b])} |f| \cdot \ell(\gamma).$$

Si $f = F'$, $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$: l'intégrale ne dépend que des valeurs de la primitive aux extrémités du chemin.

Proposition 2. *Si Ω est un domaine connexe, f continue sur Ω, f admet une une primitive au sens complexe si et seulement si l'intégrale de f sur tout chemin fermé, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est nulle ; ou de façon équivalente, les intégrales sur deux chemins qui ont les mêmes extrémité sont égales.*

Proposition 3. *Si Ω est un domaine convexe, f continue sur Ω, f admet une une primitive au sens complexe si et seulement si l'intégrale de f sur tout triangle est nulle.*

Théorème 4. *Si Ω est un domaine convexe, f continue sur Ω, alors f admet une primitive au sens complexe si et seulement si f est dérivable au sens complexe.*

Sens "seulement si" : la primitive F est de classe $\mathcal{C}^1$, dérivable au sens complexe (par construction), donc doit être analytique (localement développable en série entière) d'après un résultat du cours Analyse Complexe 1, et donc sa dérivée est aussi analytique, donc dérivable au sens complexe.

Sens "si" : on montre que si f est continue et dérivable au sens complexe, son intégrale sur tout triangle est nulle, en découpant le triangle en une suite de triangles de plus en plus petits.

6.2. **Équivalence des définitions.**

Corollaire 5. *Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{C}$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. Alors f est analytique si et seulement si f est dérivable au sens complexe.*

Ce corollaire est très important. Désormais, on ne fait plus de distinction entre "analytique" et "dérivable au sens complexe" et on parlera de "fonctions holomorphes".

Démonstration : Dans le sens direct, déjà vu dans le cours Analyse Complexe 1. Dans le sens réciproque, une fonction dérivable est toujours continue, et on applique la preuve du théorème ci-dessus dans un disque au voisinage de chaque point de Ω (la propriété d'analyticité est locale).

Le fait qu'une fonction continue dont l'intégrale sur tout triangle est nulle est nécessairement analytique (holomorphe) est appelé *Théorème de Morera.*

Corollaire 6. *(Théorème d'inversion locale)*

Si $f'(z_0) \neq 0$, il existe un voisinage de z_0 sur lequel f est inversible et son inverse est analytique.

Pour démontrer que f^{-1} est analytique, il suffit de démontrer qu'elle est $\mathbb{C}$-dérivable, et c'est facile avec la démonstration classique de dérivabilité de la fonction réciproque.

7. Généralisation de la formule de Cauchy et conséquences

Dans ce qui suit, γ sera un *cycle*, c'est-à-dire une combinaison linéaire à coefficients entiers (formelle) de courbes fermées.

7.1. **Indice d'une courbe fermée.**

Proposition 7. *Si w n'est pas dans $\gamma([a, b])$, l'image de γ, on pose*

$$Ind(\gamma; w) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - w}.$$

Cette valeur est entière, constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, et en particulier nulle sur l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.

7.2. **Formule de Cauchy.**

Théorème 8. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un cycle d'image contenue dans Ω, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.*

On suppose que pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $Ind(\gamma; w) = 0$. Alors pour tout $w \in \Omega \setminus \gamma([a, b])$,

$$f(w) \cdot Ind(\gamma; w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

En particulier, sous les mêmes hypothèses sur f et γ,

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz.$$

8. Singularités isolées, Résidus

8.1. **Classification des singularités isolées.** .

Définition 9. *On dit que f admet une* singularité isolée *en a si il existe $r > 0$ tel que f soit holomorphe sur $D(a, r) \setminus \{a\}$.*

Théorème 10. *(de la Singularité éliminable de Riemann)*

Si f admet une singularité isolée en a et $\lim_{z \to a}(z - a)f(z) = 0$, alors il existe un prolongement $\tilde{f}$ de f au disque $D(a, r)$. (En particulier, f admet une limite finie en a).

Proposition 11. *Si f admet une singularité isolée en a et $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$, alors il existe $g \in \mathcal{A}(D(a, r))$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^m}.$$

Dans ce cas, on dit que f admet un *pôle* en a et m est appelé *ordre* du pôle.

Toutes les singularités isolées qui ne sont ni éliminables ni des pôles sont appelées *singularités essentielles.*

Théorème 12. *(Casorati-Weierstrass)*

Si a est une singularité essentielle de f, alors pour tout $w \in \hat{\mathbb{C}}$, il existe une suite $a_n \to a$ telle que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = w$.

8.2. **Séries de Laurent.** On appelle *série de Laurent* une série de la forme $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$. On considère qu'elle converge si les deux séries $\sum_{k=-\infty}^{0} a_k z^k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ convergent.

Nous appellerons anneau un ensemble du type $A(a;r,R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$, où $0 \le r < R \le +\infty$. On peut voir que de telles séries ont des domaines de convergence naturels qui sont contenus entre un anneau ouvert et son adhérence.

Théorème 13. *Soit $f \in \mathcal{A}(A(a;R_1,R_2))$. Alors il existe $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $z \in A(a;R_1,R_2)$,*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-a)^k,$$

avec normale convergence sur tout $\overline{A(a;r_1,r_2)}$ dès que $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$.

Conséquence : une singularité isolée est éliminable ou un pôle si et seulement si il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $k < m$, $a_k = 0$.

8.3. **Formule des Résidus.** Cette fois-ci, nous la démontrons...

Théorème 14. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un cycle d'image contenue dans Ω, tel que pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $Ind(\gamma;w) = 0$.*

Soit S un ensemble discret dans $\Omega \setminus \gamma([a,b])$ et $f \in \mathcal{A}(\Omega \setminus S)$. Alors

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{s\in S} Ind(\gamma;s)Res(f;s).$$

Ceci a pour cas particulier la formule des résidus admise dans la première partie du cours. Remarquons que dans tous les cas la somme du membre de droite n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.

8.4. **Principe de l'argument.**

Théorème 15. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un cycle d'image contenue dans Ω, tel que pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $Ind(\gamma;w) = 0$.*

Soit S un ensemble discret dans $\Omega \setminus \gamma([a,b])$ et $f \in \mathcal{A}(\Omega \setminus S)$ telle que toutes les singularités de f aux points de S soient des pôles.

Quand s est un pôle de f, on note $m(f,s)$ son ordre. Quand z est un zéro de f, on note $m(f,z)$ sa multiplicité.

Alors

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z:f(z)=0} Ind(\gamma;z)m(f;z) - \sum_{s\in S} Ind(\gamma;s)m(f;s).$$

Corollaire 16. *(Comportement local d'une fonction analytique)*

Si f est analytique dans un voisinage de z_0 et que $f^{(k)}(z_0) = 0$ pour $1 \leq k \leq m$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, alors il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que pour tout w tel que $|w - f(z_0)| < r_2$, alors

$$Card\{z \in D(z_0, r_1) : f(z) = w\} = m.$$

En particulier, si f est injective sur un ouvert U, f' ne s'annule jamais sur U.

Proposition 17. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$, $G := f(D(a,R))$. On suppose que f est injective sur $\overline{D(a,R)}$.*

Alors pour tout $w \in G$,

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

Théorème 18. *(Théorème de Rouché)*

Soient f_1, f_2 analytiques sur Ω avec $\bar{D}(a,r) \subset \Omega$. On suppose que pour tout $z \in \partial D(a,r)$ (le cercle de centre a et de rayon r), $|f_1(z) + f_2(z)| < |f_1(z)| + |f_2(z)|$. Alors f_1 et f_2 ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicités) dans le disque ouvert $D(a,r)$ (l'hypothèse implique qu'aucune des deux fonctions ne s'annule sur le cercle).

9. Simple connexité

9.1. Homotopie de chemins.

Définition 19. *Soient γ_0 et γ_1 deux applications continues de $[0;1]$ dans Ω (courbes). On dit qu'elles sont* homotopes *(avec extrémités fixées) s'il existe une application continue $H :\longrightarrow \Omega$ telle que*

(1) Pour $j = 0, 1$, et tout $t \in [0;1]$, $H(j,t) = \gamma_j(t)$;

(2) Pour $t = 0, 1$, et tout $\theta \in [0;1]$, $H(\theta, t) = \gamma_0(t) = \gamma_1(t)$.

On écrit $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

Remarquez que cette définition suppose que γ_0 et γ_1 ont les mêmes points de départ et d'arrivée.

Théorème 20. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, γ_0 et γ_1 deux chemins ($\mathcal{C}^1$ par morceaux) de $[0;1]$ dans Ω tels que $\gamma_0 \sim \gamma_1$. Alors*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

9.2. Domaines simplement connexes.

Définition 21. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, on dit qu'il est* simplement connexe *si dès que deux courbes ont les mêmes extrémités, elles sont homotopes ; ou de façon équivalente, si toute courbe fermée est homotope à la courbe constamment égale à son point de départ (et d'arrivée).*

Exemples d'ouverts simplement connexes : tout ouvert convexe, tout ouvert étoilé, tout ouvert homéomorphe à un ouvert simplement connexe connu...

Corollaire 22. *Si Ω est simplement connexe, toute fonction analytique sur Ω admet une primitive.*

(On applique le Théorème 20 et la Proposition 2).

En particulier, toute fonction f analytique sur Ω et qui ne s'annule jamais sur Ω admet un logarithme (primitive de f'/f) et donc une racine carrée ($\exp(\frac{1}{2}\log(f))$).

Fait admis (mais que nous n'utiliserons pas) : un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est simplement connexe si et seulement si $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ est connexe.

10. Suites de fonctions holomorphes

Théorème 23. *(de Weierstrass)*

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{A}(\Omega)$, qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers f. Alors $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Définition 24. *Soient X, Y deux espaces métriques et $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$. On suppose X compact. On dit que la famille d'applications $\mathcal{F}$ est* équicontinue *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F}, d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Théorème 25. *(d'Ascoli)*

Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ est équicontinue et que pour tout $x \in X$, l'adhérence de $\mathcal{F}(x) := \{f(x), f \in \mathcal{F}\}$ est compacte dans Y, alors toute suite $(f_n)_n \subset \mathcal{F}$ admet une sous-suite uniformément convergente.

Théorème 26. *(de Montel)*

Soit Ω un ouvert connexe et une famille $\mathcal{F}$ de fonctions de $\mathcal{A}(\Omega)$ localement bornée, c'est-à-dire que pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que

$$\sup_{z \in D(z_0, r), f \in \mathcal{F}} |f(z)| = M < \infty,$$

alors toute suite $(f_n)_n \subset \mathcal{F}$ admet une sous-suite uniformément convergente sur tout compact de Ω.

11. Théorème de l'application de Riemann

Théorème 27. *(Riemann)*

Soit Ω un ouvert différent de $\mathbb{C}$ tout entier sur lequel toute fonction analytique qui ne s'annule jamais admet une racine carrée. Soit $z_0 \in \Omega$.

Alors il existe une unique bijection holomorphe φ de Ω dans $D(0, 1)$ telle que $\varphi(z_0) = 0$ et $\varphi'(z_0) > 0$.

Méthode de démonstration : on maximise $f'(0)$ sur l'ensemble

$$\{f \in \mathcal{A}(\Omega) : f(\Omega) \subset D(0, 1), f \text{ injective }, f'(z_0) > 0\}$$

(il faut d'abord montrer que cet ensemble n'est pas vide). Le Théorème de Montel sert à montrer que la borne supérieure est atteinte.

Corollaire 28. *Pour un ouvert $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe une bijection biholomorphe entre Ω et $D(0, 1)$.

(2) Ω est simplement connexe.

(3) Pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, et tout chemin fermé γ dans Ω, Ind$(\gamma; w) = 0$.

(4) Toute $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ admet une primitive (complexe).

(5) Toute $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ qui ne s'annule jamais admet un logarithme.

(6) Toute $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ qui ne s'annule jamais admet une racine carrée.

Remarque : on démontre facilement par un argument de connexité que si $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ est connexe, alors la propriété (3) est vérifiée, ce qui démontre (grâce au théorème de Riemann) une des deux implications du Fait admis dans la section sur la simple connexité.