

# ANALYSE COMPLEXE, PARCOURS SPÉCIAL L3 RÉSUMÉ DE COURS

PASCAL THOMAS

Pré-requis : séries entières, séries de Fourier, calcul différentiel dans le plan (matrice jacobienne, arcs paramétrés, intégrales de fonctions de deux variables réelles).  
Dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre.

On écrira en général  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont réels.

## 1. SÉRIES ENTIÈRES ET ANALYTICITÉ

**1.1. Définitions.** Une série entière est une série de fonctions de la forme  $\sum_k a_k z^k$ , avec  $a_k, z \in \mathbb{C}$ .

**Théorème 1.** *Il existe  $R \in [0, +\infty]$ , appelé rayon de convergence, tel que pour tout  $r < R$ , la série est normalement convergente sur  $\overline{D}(0, r)$ , et pour tout  $z$  tel que  $|z| > R$ ,  $(a_k z^k)$  est non bornée.*

*De plus,  $R$  est donné par la formule d'Hadamard :*

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}}.$$

**Définition 2.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un ouvert. Une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est dite analytique si pour tout  $a \in \Omega$ , il existe une série entière  $\sum_k a_k z^k$  de rayon de convergence  $R > 0$  telle que pour tout  $z \in D(a, R)$ ,*

$$(1) \quad f(z) = \sum_k a_k (z - a)^k.$$

**Définition 3.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un ouvert. Une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $a \in \Omega$  si et seulement si la limite suivante existe :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =: f'(a) \in \mathbb{C},$$

où  $h$  est un nombre complexe et tend vers 0 au sens de la topologie de  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ .

## 1.2. Propriétés.

**Proposition 4.** *Si  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $a$ , alors  $f$  admet des dérivées partielles en  $a$  qui vérifient les équations de Cauchy-Riemann :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(a) &= -\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(a), \\ \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(a) &= \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(a). \end{aligned}$$

**Proposition 5.** *Une fonction analytique est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au sens des dérivées partielles par rapport aux variables réelles  $x$  et  $y$ , et est  $\mathbb{C}$ -dérivable à tous les ordres, et les coefficients dans (1) sont donnés par  $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$ .*

Propriétés : les sommes, produits, compositions de fonctions analytiques sont analytiques. Les quotients aussi, quand le dénominateur ne s'annule pas.

Au voisinage de l'image d'un point où la dérivée de  $f$  ne s'annule pas, l'application réciproque  $f^{-1}$  est analytique (admis).

**1.3. Exemples.** Tous les polynômes (en  $z$ ) sont analytiques sur  $\mathbb{C}$  tout entier, les fractions rationnelles sont analytiques en dehors des racines de leur dénominateur.

**Définition 6.** On définit l'exponentielle complexe par  $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ .

**Proposition 7.**  $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ ,  $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ , pour  $y \in \mathbb{R}$ ,  $|\exp(iy)| = 1$ ,  $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$ ,  $\frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z)$ .

On pose  $\exp(z) = e^z$  où  $e := \exp(1)$  et  $\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ ,  $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ .

La fonction  $\exp$  est périodique de période  $2\pi i$ , et pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , il existe un unique  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  tel que  $e^w = z$  avec  $w = \operatorname{Log} z := \log|z| + i\theta$ . On appelle  $\theta$  l'argument de  $z$  et  $\operatorname{Log}$  la détermination principale du logarithme complexe.

## 2. PROLONGEMENT ANALYTIQUE

### 2.1. Théorème des zéros isolés.

**Théorème 8.** Soit  $f$  analytique au voisinage de  $z_0$ , avec  $f(z_0) = 0$ . Alors soit il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $z$  tel que  $0 < |z - z_0| < r$ ,  $f(z) \neq 0$ , soit il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $z$  tel que  $|z - z_0| < r$ ,  $f(z) = 0$ .

On rappelle qu'étant donné un ensemble  $A$ , un point  $a$  est un point d'accumulation de  $A$  si pour tout  $r > 0$ , il existe  $x \in A$  tel que  $0 < |a - x| < r$ ; et que c'est un point isolé de  $A$  si  $a \in A$  et qu'il existe  $r > 0$  tel que  $D(a, r) \cap A = \{a\}$ .

### 2.2. Théorème du Prolongement analytique.

**Définition 9.** Soit  $\Omega$  un sous ensemble d'un espace topologique. On dit que  $\Omega$  est connexe si pour tout couple d'ouverts disjoints  $U_1, U_2$  tels que  $U_1 \cup U_2 \supset \Omega$  alors soit  $U_1 \cap \Omega = \emptyset$ , soit  $U_2 \cap \Omega = \emptyset$ .

On dit que  $\Omega$  est connexe par arcs si pour tous  $x, y \in \Omega$ , il existe une courbe continue  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  telle que  $\gamma(a) = x$ ,  $\gamma(b) = y$ .

Fait : la deuxième propriété implique toujours la première. Pour des ouverts de  $\mathbb{C}$ , ou même d'un espace vectoriel normé à coefficients réels, elles sont équivalentes.

**Théorème 10.** Si  $\Omega$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ , que  $f$  et  $g$  sont analytiques sur  $\Omega$ , et que l'ensemble  $A := \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$  possède un point d'accumulation dans  $\Omega$ , alors  $f = g$ .

Corollaire : si  $f$  est analytique sur un ouvert  $\Omega$ , non identiquement nulle, et  $K$  compact dans  $\Omega$ , alors  $f^{-1}\{0\} \cap K$  est un ensemble fini.

Autre application : si deux fonctions sont analytiques sur un ouvert connexe qui intersecte la droite réelle, toute relation algébrique entre ces fonctions valide pour cette portion de la droite réelle demeurera valide sur tout l'ouvert. On étend ainsi les identités trigonométriques habituelles, par exemple.

## 3. FORMULE DE LA MOYENNE, FORMULE DE CAUCHY DANS UN DISQUE

## 3.1. Formule de la moyenne.

**Théorème 11.** *Si  $f$  est la somme d'une série entière centrée en  $a$  de rayon de convergence  $R > r$ , alors pour tout  $k \geq 0$ ,*

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta.$$

*En particulier,  $f(a)$  est la moyenne des valeurs de  $f$  sur le cercle de centre  $a$  et de rayon  $r$ .*

Cette formule est une conséquence immédiate de la formule qui donne les coefficients de Fourier d'une fonction périodique. Nous allons en voir des généralisations très puissantes.

## 3.2. Formule de Cauchy dans un disque.

**Définition 12.** *Si  $\gamma$  est une courbe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ , et  $f$  est une fonction continue définie sur  $\Omega$ , alors*

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Fait : cette définition est invariante par changement de paramétrage bijectif *croissant*.

Exemple : si on prend sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ ,  $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$ , la formule de la moyenne pour  $k = 0$  devient

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

**Théorème 13.** *Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathbb{C}$ -dérivable (en particulier si  $f$  est analytique) sur  $\Omega$  avec  $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$ , alors en prenant la courbe  $\gamma$  le cercle ci-dessus, pour tout  $z_0 \in D(a, r)$ ,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Corollaire : si  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ , alors elle est développable en série entière autour de chaque  $a \in \Omega$  avec un rayon de convergence supérieur ou égal à  $r_a := \text{dist}(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ , et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 < r < r_a$

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(z) dz}{(z - a)^{k+1}},$$

où  $C(a, r)$  désigne le cercle de centre  $a$  et de rayon  $r$ , parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

Ceci est utile même si on savait que  $f$  était analytique : nous avons ainsi amélioré notre connaissance du rayon de convergence du développement local en série entière.

On en déduit les *estimations de Cauchy* : pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \right| \leq \frac{\sup_{D(a, r)} |f|}{r^k}.$$

### 3.3. Conséquences de la formule de Cauchy dans un disque.

Théorème de Liouville :

**Théorème 14.** *Si  $f$  est analytique sur  $\mathbb{C}$  tout entier et bornée, alors  $f$  est constante.*

Corollaire : Théorème Fondamental de l'Algèbre. Si  $P$  est un polynôme de degré  $n$ , alors  $P$  admet exactement  $n$  racines complexes (comptées avec multiplicité).

## 4. THÉORÈME DE CAUCHY ET FORMULE DES RÉSIDUS

**4.1. Théorème de Cauchy.** On dit qu'une courbe est *fermée* si  $\gamma(b) = \gamma(a)$ . On dit qu'une courbe est *de Jordan* si elle est fermée et que pour tous  $t_1 \neq t_2 \in [a, b[$ ,  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ .

Fait (admis) : si  $\gamma$  est une courbe de Jordan,  $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$  a deux composantes connexes exactement, dont une seule est non-bornée. On note  $\hat{\gamma}$  l'adhérence de la composante connexe bornée de  $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ . Intuitivement, ce sont les points entourés par la courbe (plus la courbe elle-même). On parle parfois d'*intérieur* de la courbe pour l'ensemble des points entourés par la courbe, il ne faut pas confondre cette notion avec celle d'intérieur au sens topologique.

Théorème de Cauchy :

**Théorème 15.** *Si  $\Omega$  est un ouvert,  $\gamma$  une courbe de Jordan  $\mathcal{C}^1$  par morceaux telle que  $\hat{\gamma} \subset \Omega$ , et  $f$  une fonction  $\mathbb{C}$ -dérivable sur  $\Omega$ , alors  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ .*

### ADMIS.

On remarquera que ce théorème, dans le cas particulier où  $f$  est par surcroît de classe  $\mathcal{C}^1$  et que  $\gamma$  est un cercle, peut se déduire de la formule de Cauchy : il suffit de prendre un point  $a$  à l'intérieur du disque et d'appliquer la formule de Cauchy à  $g(z) := (z - a)f(z)$ , au point  $a$ .

### 4.2. Formule des résidus.

**Définition 16.** *On dit qu'une fonction analytique  $f$ , définie sur  $D(a, r) \setminus \{a\}$ , admet un pôle d'ordre  $m$  au point  $a$  si il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $g$  analytique sur  $D(a, r)$ , avec  $g(a) \neq 0$ , tels que*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^m}, z \in D(a, r) \setminus \{a\}.$$

**Proposition 17.** *Avec les notations ci-dessus, si on pose  $g(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - a)^k$ , et  $C(a, \varepsilon)$  le cercle de centre  $a$  et de rayon  $\varepsilon$ , parcouru une fois dans le sens trigonométrique, alors pour tout  $\varepsilon \in ]0, r[$ ,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \varepsilon)} f(z)dz = a_{m-1} =: \text{Res}(f; a),$$

appelé Résidu de  $f$  au point  $a$ .

En particulier, si  $m = 1$  (pôle simple) alors  $\text{Res}(f; a) = g(a)$ , si  $m = 1$  (pôle double) alors  $\text{Res}(f; a) = g'(a)$ .

Théorème des résidus.

**Théorème 18.** *Si  $\Omega$  est un ouvert,  $f$  une fonction analytique sur  $\Omega \setminus A$ , où  $A$  est un ensemble sans point d'accumulation (donc fini ou dénombrable),  $f$  admettant un*

pôle en chaque point de  $A$ ,  $\gamma$  une courbe de Jordan  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, orientée dans le sens trigonométrique, telle que  $\gamma([a, b]) \cap A = \emptyset$  et  $\hat{\gamma} \subset \Omega$ , alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{w \in A \cap \hat{\gamma}} \text{Res}(f; w).$$

On note que  $A \cap \hat{\gamma}$  est un ensemble fini, donc la somme ci-dessus est toujours une somme finie.

### ADMIS.

Remarque. Le théorème serait vrai sans l'hypothèse que les points de  $A$  sont des pôles, en définissant les résidus par la formule intégrale dans la proposition ci-dessus (dont on peut montrer qu'elle ne dépend pas de  $\varepsilon$  même dans le cas général).

**4.3. Applications de la formule des résidus.** Un certain nombre d'intégrales définies peuvent se calculer en utilisant la formule des résidus.

**Cas 1.**  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \frac{P(x)}{Q(x)}$ , où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes tels que  $\deg Q \geq \deg P + 2$  et  $Q(x) \neq 0$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

On utilise le contour (courbe fermée) constitué du segment de droite de  $-R$  à  $R$ , puis un arc de cercle centré en 0 qui va de  $R$  à  $-R$ , et on fait  $R \rightarrow +\infty$ . Si  $\xi \neq 0$ , il faut choisir le demi cercle dans le demi plan où le terme exponentiel sera de module borné par 1.

**Cas 2.**  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} e^{ix\xi} \frac{P(x)}{Q(x)}$ , où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes tels que  $\deg Q \geq \deg P + 1$  et  $Q(x) \neq 0$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

On utilise un contour rectangulaire choisi de la même manière que ci-dessus. La contribution de la partie située en dehors de l'axe réel tendra vers 0 à cause du Lemme de Jordan. Attention, l'intégrale que l'on calcule n'est pas absolument convergente.

**Cas 3.** On peut traiter des cas où  $Q$  a des zéros simples sur l'axe réel, mais ces intégrales doivent s'interpréter en "valeur principale" : il faut prendre la limite de l'intégrale calculée sur l'axe réel privé d'un petit intervalle symétrique autour du pôle. Cela nécessite d'ajouter au contour un petit demi-cercle autour de chaque pôle réel.

Il y a quelques autres cas que nous ne détaillerons pas ici, voir la feuille de TD numéro 3.

## 5. PRINCIPE DU MODULE MAXIMUM

**Théorème 19.** Soit  $\Omega$  un ouvert connexe,  $f$  analytique sur  $\Omega$ , alors si  $|f|$  admet un maximum local, la fonction  $f$  est constante.

Remarque : on démontre au passage que la même propriété est vérifiée par  $\text{Re } f$ .

Corollaire : si  $\Omega$  est un ouvert connexe borné, que  $f$  est analytique sur  $\Omega$  et continue sur  $\bar{\Omega}$ , alors il existe  $z_0 \in \partial\Omega := \bar{\Omega} \setminus \Omega$  tel que  $|f(z_0)| = \max_{\bar{\Omega}} |f|$ .