Feuille n° 4 - Intégrales curvilignes et de surface

Exercice 1. Le cercle de rayon 1 roule sans glisser sur l'axe Ox. On considère qu'à l'instant $t = 0$ le point M du cercle se trouve à l'origine. Lorsque le centre du cercle a parcouru une distance égale à t, le point M a les coordonnées $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$. Calculer la distance parcourue par M entre deux rencontres succéssives avec l'axe Ox. (La courbe $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ s'appelle *cycloïde*.)

Exercice 2. a) Déterminer la longueur de la courbe $y = \sqrt{x}(1 - \frac{x}{3})$ pour $0 \leq x \leq 3$.
b) Calculer la longueur de la néphroïde représentée paramétriquement par

$$x(t) = 3\cos t - \cos(3t) \quad \text{et} \quad y(t) = 3\sin t - \sin(3t), \quad \text{où } t \in [0, 2\pi].$$

c) Calculer la longueur de la courbe $(x(t), y(t), z(y)) = (t^2, 2t, \ln t)$, où $1 \leq t \leq e$.

Exercice 3. On considère une courbe plane $\vec{\gamma} : [\theta_1, \theta_2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\vec{\gamma}(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$, où r est une fonction C^1 sur $[\theta_1, \theta_2]$. (On dit que $\vec{\gamma}$ est donnée en coordonnées polaires: pour connaître la courbe, il suffit de connaître le rayon $r(\theta)$ pour chaque angle θ; on ecrit parfois $r = r(\theta)$ pour représenter une telle courbe.)
a) Montrer que la longueur de $\vec{\gamma}$ est

$$\ell(\vec{\gamma}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + (r')^2(\theta)}\, d\theta.$$

b) Calculer la longueur de la courbe d'équation (en variables polaires) $r(\theta) = \cos\theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
c) Calculer la longueur de la cardioïde, définie en coordonnées polaires par $r(\theta) = 1 + \cos\theta$, où $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Exercice 4. On considère les champs de vecteurs $\mathbf{F}_1(x, y) = (x, y+2)$ et $\mathbf{F}_2(x, y) = (0, -\mathrm{mg})$. Calculer les intégrales curvilignes de $\mathbf{F}_1$ et de $\mathbf{F}_2$ sur un arc de cycloïde: $\mathbf{x}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercice 5. Calculer le travail du champ vectoriel $V(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ le long de la courbe paramétrée par $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, où $0 \leq t \leq 1$.

Exercice 6. Soit S l'hémisphère nord $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0\}$. Calculer

$$I = \iint_S (x^2 z + y^2 z)\, dS.$$

Exercice 7. Soit C le cylindre $x^2 + y^2 = 9$ fermé par les couvercles en $z = 0$ et $z = 2$. Calculer

$$\iint_C (x^2 + y^2 + z^2)\, dS.$$

Exercice 8. a) On considère la surface Σ obtenue en faisant tourner autour de l'axe Ox le graphe d'une fonction continue et positive $f : [a, b] \longrightarrow]0, \infty[$. Une paramétrisation de Σ est donnée par $\vec{\sigma} : [a, b] \times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{\sigma}(x, \theta) = (x, f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta)$. Montrer que l'aire de Σ est

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

b) Calculer l'aire de la sphère de rayon R.
c) Soient $0 < a < R$. Dans le plan (xOy), soit C le cercle de centre $(0, R, 0)$ et de rayon a. En tournant autour de l'axe (Ox), le cercle C engendre un tore Σ. Calculer l'aire de Σ.

Exercice 9. a) Soit $D = [0,2] \times [0,3]$. Soit $\vec{\sigma} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\vec{\sigma}(u,v) = (u, u^2, v)$. On note Σ la surface qui est l'image de $\vec{\sigma}$. On considère le champ de vecteurs $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par $\vec{F}(x,y,z) = (3z^2, 6, 6xz)$. Calculer

$$\iint_\Sigma \langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \rangle.$$

b) Même exercice en permutant les variables u et v: pour $\vec{\tau} : [0,3] \times [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{\tau}(u,v) = (v, v^2, u)$, calculer $\iint_\Sigma \langle \vec{F}, d\vec{\tau} \rangle$.

Exercice 10. Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z = 1\}$. On considère que la normale à Σ est orientée vers le haut. Soit $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, 0, 3y^2)$. Calculer

$$\iint_\Sigma \langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \rangle.$$

(*Ind.: La surface* Σ *est le graphe de la fonction* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = 1 - x - y$, *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$)

Exercice 11. Calculer le flux $\Phi = \iint_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, dS$ du champ vectoriel $\vec{F}$ à travers la surface S pour

a) $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, 3z)$, $S = \{z = \sqrt{16 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \leq 16\}$ et $\vec{n}$ orientée vers le haut;

b) $\vec{F}(x,y,z) = (-x, xy, z^2)$, S la partie du cône $\{z = \sqrt{x^2+y^2},\ 1 \leq z \leq 2\}$ et $\vec{n}$ orientée vers l'intérieur.