Feuille n° 3 - Intégrales multiples

Exercice 1. Soit $D = [0,1]^2$. Calculer: $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$.

Exercice 2. a) Calculer $I_1 = \displaystyle\iint_D (x+y)e^{-x}e^{-y}\,dx\,dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0, x+y \leq 1\}$.

b) Calculer $I_2 = \displaystyle\iint_D x\sin y\,dx\,dy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \cos y\}$. Dessiner !

c) Soit $D = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x^2+y^2 \geq 1\}$. Calculer $I_3 = \displaystyle\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Calculer $I_4 = \displaystyle\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$ où $D = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid z \leq \min(1-x^2, 1-y^2)\}$.

Exercice 3. Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$. Calculer:

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

Exercice 4. Quel est le volume délimité par deux cylindres de révolution d'axes (Ox) et (Oy) et de même rayon $R > 0$?

(*Ind.: Utiliser le théorème de Fubini et exprimer le volume comme une intégrale double sur le carré* $[-R,R] \times [-R,R]$ *contenu dans le plan* xOy*; ensuite décomposer ce carré en quatre triangles.*)

Exercice 5. a) Soit $f : [a,b] \longrightarrow [0,\infty[$ une fonction continue. Soit Ω_f le corps obtenu par la rotation du graphe de f autour de l'axe (Ox):

$$\Omega_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ \sqrt{y^2+z^2} \leq f(x)\}.$$

Montrer que $\text{Volume}(\Omega_f) = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx$. (*Ind.: On peut utiliser le Théorème de Fubini.*)

b) Calculer le volume d'un "tonneau" $\Omega_{a,b,c} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -a \leq x \leq a, \sqrt{y^2+z^2} \leq b\sin(cx)\}$, où $b,\ c > 0$ et $0 < a < \frac{c\pi}{2}$.

c) Soient $) < a < R$. Dans le plan (xOy), soit D le disque de centre $(0,R,0)$ et de rayon a. En tournant autour de l'axe (Ox), le disque D engendre un domaine T (appelé un tore plein). Calculer le volume de T.

Exercice 6. Identifier les ensembles suivants et calculer leur aire s'ils sont dans $\mathbb{R}^2$, leur volume s'ils sont dans $\mathbb{R}^3$.

1. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ avec $a,b > 0$; (*Ind.: utiliser le changement de variables* $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$.)
2. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$ avec $a,b,c > 0$; qu'obtient-on dans le cas particulier où D est la boule unité de $\mathbb{R}^3$? (*Ind.: utiliser le changement de variables* $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = b\sin\theta\cos\varphi$, $z = c\sin\varphi$, *où* $\theta \in [0,2\pi]$ *et* $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.)
3. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq R,\ 0 \leq z \leq h\}$ avec $R,h > 0$;
4. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$;
5. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq z^2/h^2,\ 0 \leq z \leq h\}$ avec $h > 0$.

Exercice 7. Trouver le volume du solide en dessous du cône $C : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et au dessus de la couronne $A : z = 0$ et $4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$. Dessiner!

Exercice 8. Calculer le volume du solide qui est à la fois à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et de l'ellipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$. Dessiner!

Exercice 9. En utilisant un changement de variables, calculer l'intégrale de f sur D avec

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 < x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$; $f(x, y) = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$;
2. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ avec a , $b > 0$; $f(x, y) = x^2 + y^2$;
3. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \, , \, 0 \leq z \leq h\}$ avec $h > 0$; $f(x, y, z) = z$;
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$; $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$.

Exercice 10. a) Soit D le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 du plan. Calculer :

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

b) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D (4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$.
c) Soit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2 + y^2\}$. Calculer le volume de Ω.
d) Calculer $I = \displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^2 + y^2 < x\}$.
e) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 \leq xy\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\, dx\, dy$.
(*Ind.: Effectuer un changement de variables et passer en coordonnées polaires.*)

Exercice 11. Calculer $I = \displaystyle\iint_D xy\, dx\, dy$ où $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ avec $a, b > 0$.

Exercice 12. Calculer

$$\int_{-a}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2 - y^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dx\, dy.$$

(*Indication: on peut utiliser Fubini, puis passer en coordonnées polaires.*)

Exercice 13. Soient $0 < a \leq b, 0 < c \leq d$, et $D = \{ax^2 \leq y \leq bx^2, \frac{c}{x} \leq y \leq \frac{d}{x}\}$. Calculer l'aire de D.
(*Indication: poser* $u = \frac{y}{x^2}$ *et* $v = xy$.)

Exercice 14. Soit V le solide borné par les 3 plans de coordonnées et la surface S d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$. Calculer son volume en utilisant le changement de variables $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$.