Feuille n° 2 - Dérivées partielles, différentiabilité

Exercice 1. Pour les applications $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes, étudier la continuité de f, l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *b)* $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Exercice 2. Déterminer l'ensemble de définition puis calculer les dérivées partielles des fonctions définies par

$$f(x,y) = \arctan xy, \qquad g(x,y) = \arctan \tfrac{y}{x}, \qquad h(x,y,z) = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}, \qquad \varphi(x,y) = x^2 \sin y,$$

$$\psi(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad \theta(x,y) = \ln(x+y).$$

Étudier la différentiabilité de ces fonctions.

Exercice 3. Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que L est continue.
Montrer que L admet des dérivées partielles premières que l'on explicitera.
Montrer que L est différentiable et expliciter sa différentielle.

Exercice 4.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f au point $(x,y) = (0,0)$ (*Ind.: remarquer que* $2|x^2y| \leq x^4+y^2$).

2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières au point $(0,0)$ mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 5. Déterminer le plan tangent au graphe de la fonction $z(x,y) = 8 - x^2 - y^2$ au point $(x_0, y_0, z_0) = (1,2,3)$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$.

a) Montrer que **si** f admet un minimum en un point (x_0,y_0) i.e., $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

On pourra considérer les fonctions d'une variable réelle $f_1(t) = f(x_0+t, y_0)$ et $f_2(t) = f(x_0, y_0+t)$.

b) Montrer que $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + x$ n'admet pas de minimum.

c) Montrer que $f(x,y) = x^2 - y^2$ n'admet pas de minimum.

d) Montrer que si $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + x + 3y$ admet un minimum alors ce minimum est atteint au point $(x_0,y_0) = (1, -5/2)$. Montrer que f admet effectivement un minimum en ce point.

Exercice 7. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(x,y,z) = (x^2-y^2, y^2-z^2, z^2-x^2)$$

et une application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

a) Écrire les matrices jacobiennes de φ et de l'application $g = f \circ \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

b) Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(t,t,t) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(t,t,t) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(t,t,t)$ pour tout réel t.

Exercice 8.

a) Trouver toutes les fonctions f telles que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin x \sin y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos x \cos y$.

b) Même question avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy+y^3$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2+3y^2x$. Comparer $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

c) Même question avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$.

d) Même question avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + \cos x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + y^2$.

Exercice 9. a) On considère les expressions

$$dz = ydx - xdy \qquad \text{et} \qquad dz = y^2dx + 2xydy$$

Décider dans chaque cas s'il s'agit d'une différentielle totale, et le cas échéant, déterminer une fonction $f(x,y)$ dont elle dérive.

b) Montrer que $dQ = C_v dT + \frac{nRT}{V} dV$ n'est pas une différentielle totale.

Montrer que $\frac{dQ}{T}$ est une différentielle totale.

Exercice 10. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

On pourra effectuer le changement de variables $x = u$, $y = -u + v$.

Exercice 11. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

On pourra effectuer le changement de variables $x = u$, $y = v + u^2$.

Exercice 12. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$, continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0),\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

On pourra effectuer le changement de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 13. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^2 sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient

$$a)\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad b)\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad c)\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos(x+y)\ .$$

Exercice 14. Soit l'opérateur de Laplace N-dimensionnel $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$.

a) Montrer que pour $N \geq 3$ on a $\Delta\left(\frac{1}{\|x\|^{n-2}}\right) = 0$ pour tout $x \neq 0$ où $\|x\| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$ est la norme euclidienne.

b) Pour $N = 2$ on a $\Delta\left(\ln \frac{1}{\|x\|}\right) = 0$ pour tout $x \neq 0$.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On pose $g(x,y) = f(x^2-y^2, 2xy)$. Calculer $\Delta(g)$ en fonction de $\Delta(f)$, où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Exercice 16. Soit $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction à valeurs vectorielles (également appelée *champ de vecteurs*) de classe C^1. On définit la divergence et le rotationnel de $\vec{F}$ par

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \qquad \text{et} \qquad \vec{\operatorname{rot}}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right).$$

a) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Montrer que

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f \qquad \text{et} \qquad \vec{\operatorname{rot}}(\nabla f) = 0.$$

b) Soit $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^2. Montrer que

$$\operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}}(\vec{F})) = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}(\vec{F})) = \nabla(\operatorname{div}(\vec{F})) - \Delta\vec{F}.$$