Feuille n° 1 - Fonctions de plusieurs variables: limites, continuité

Exercice 1. Calculer les limites des fonctions suivantes au points indiqués:

1) $f(x,y) = x + y^2$, au point $(1,-2)$,

2) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ aux points $(0,0)$ et $(1,0)$; peut-on calculer la limite en $(1,1)$?

3) $f(x,y) = \ln(\frac{x}{1+y^2})$ au point $(0,0)$.

Exercice 2. Soit la fonction de deux variables f_α définie par

$$\begin{aligned} f_\alpha : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\mapsto \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f_\alpha(x,y) = \frac{x^5y^8}{(x^2+y^2)^\alpha}. \end{aligned}$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre donné.

1. Montrer que pour tout $\alpha < \dfrac{13}{2}$, la fonction f_α admet une limite en $(0,0)$.
   Indication : en distinguant les cas $|x| \le |y|$ et $|x| \ge |y|$ montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $|x^5y^8| \le (x^2+y^2)^{\frac{13}{2}}$ puis conclure.

2. Etudier la limite de f_α en $(0,0)$ pour $\alpha = \dfrac{13}{2}$ sur la droite $y = tx$. Conclusion?

Exercice 3. On considère la fonction $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. Montrer que f est constante sur les droites passant par $(0,0)$. La fonction f a-t-elle une limite en $(0,0)$?

Exercice 4. Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$$

et que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 5. Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Montrer que les deux limites itérées

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

n'existent pas, et que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe et est égale à 0.

Exercice 6. Étudier l'existence des limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x+y}$;
2. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$;
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$;
4. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$.
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos xy}{y^2}$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (\lim\limits_{y \longrightarrow 0} f(x,y)) = \lim\limits_{y \longrightarrow 0} (\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x,y)) = 0$.

b) Montrer que pour tout $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ on a $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} f(tv_1, tv_2) = 0$.

c) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 8. Déterminer le domaine de continuité de chacune des fonctions réelles de deux variables $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ suivantes

$$f(u,v) = \ln(u-v) + \frac{1}{u+2v+3}, \quad g(u,v) = \ln(|u-v|) + e^{\frac{1}{u^2-v^2}}.$$

Exercice 9. Soit la fonction

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \leq |y| \\ y^2 & \text{si } |x| \geq |y| \end{cases}$$

Etudier la continuité de f.