UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2018-19
DEVOIR MAISON 1

Solution.

1. *Le but de cet exercice est de démontrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique dans un disque $D(0,r)$, $r>0$, telle que pour tout $n>1/r$,*

$$f(\frac{1}{n}) = e^{-n}. \tag{1}$$

a) Montrer que $f(0)=0$.

Comme une fonction f analytique est continue, $f(0) = \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = 0$.

b) Montrer que pour tout $r' \in]0,r[$, il existe $z \in D(0,r')$ tel que $f(z)\neq 0$.

On choisit n un entier tel que $n > \frac{1}{r'}$, alors $\frac{1}{n} \in D(0,r')$ et $f(\frac{1}{n}) = e^{-n} \neq 0$.

c) Pour $k\in\mathbb{N}$, on pose $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$. Montrer qu'il existe $k\geq 1$ tel que $a_k \neq 0$.

Si on avait au contraire que $a_k = 0$ pour tout $k\geq 1$, f serait constante, donc nulle par la question a), or les valeurs aux différents points $\frac{1}{n}$ sont non-nulles.

d) On pose $k_0 := \min\{k : a_k \neq 0\}$. Calculer $\lim_{z\to 0} \dfrac{f(z)}{a_{k_0} z^{k_0}}$.

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{a_{k_0} z^{k_0}} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{a_{k_0} z^{k_0}} \left(\sum_{k\geq k_0} a_k z^k \right) = \lim_{z\to 0} \left(1 + \frac{z}{a_{k_0}} \sum_{k\geq k_0+1} a_k z^{k-k_0-1} \right) = 1.$$

e) Aboutir à une contradiction et conclure.

Si on prend $z = \dfrac{1}{n}$ dans la limite ci-dessus, on trouve

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n})}{a_{k_0} \left(\frac{1}{n}\right)^{k_0}} = \lim_{n\to\infty} n^{k_0} \frac{e^{-n}}{a_{k_0}} = 0,$$

contradiction.

2. *Nous allons montrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique sur $\Omega := D(0,r)\setminus\{0\}$ (avec $r>0$) telle que $f(z)^2 = z$ pour tout $z\in\Omega$.*

a) On pose $\Omega_1 := D(0,r)\setminus]-r,0]$ et $r_1(z) := \exp(\frac{1}{2} Log\, z)$, $r_2(z) := -\exp(\frac{1}{2} Log\, z)$. Montrer qu'il existe $j\in\{1,2\}$ tel que $f(z) = r_j(z)$ pour tout $z\in\Omega_1$ (utiliser le fait que si le produit de deux fonctions analytiques s'annule, alors une des deux fonctions est identiquement nulle).

Puisque $\Omega_1 \subset \Omega$, pour tout $z\in\Omega_1$, $f(z)^2 = z = r_1(z)^2$ (puisque Log est une détermination du logarithme complexe dans Ω_1). Alors pour tout $z\in\Omega_1$,

$$0 = f(z)^2 - r_1(z)^2 = (f(z) - r_1(z))\,(f(z) + r_1(z)) = (f(z) - r_1(z))\,(f(z) - r_2(z)),$$

donc un des deux facteurs doit être identiquement nul puisque Ω_1 est connexe.

b) En déduire que f ne peut pas être continue au point $-\frac{r}{2}$.

Supposons que $f(z) = r_1(z)$ (la démonstration est analogue dans l'autre cas). Alors quand $z \to -r/2$ avec $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Arg} z \to \pi$, où $\operatorname{Arg} z$ désigne la détermination de l'argument de z prise dans l'intervalle $]-\pi, +\pi[$. Donc $r_1(z) \to \exp(\frac{1}{2}\log\frac{r}{2} + i\frac{\pi}{2}) = i\sqrt{\frac{r}{2}}$. Par contre, quand $z \to -r/2$ avec $\operatorname{Im} z < 0$, $\operatorname{Arg} z \to -\pi$, donc $r_1(z) \to \exp(\frac{1}{2}\log\frac{r}{2} - i\frac{\pi}{2}) = -i\sqrt{\frac{r}{2}}$. Donc la fonction f n'a pas de limite au point $-r/2$ et n'est pas prolongeable par continuité.

3.
On considère une fonction f analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier. On suppose que $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$. On rappelle que ceci signifie :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists R > 0 : |z| \geq R \Rightarrow |f(z)| < \varepsilon.$$

Montrer en utilisant les inégalités de Cauchy en 0, que $f(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Calculons le k-ième coefficient de Taylor de f en 0:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz,$$

donc si on prend $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que $|f(z)| \leq \varepsilon$ dès que $|z| \geq R$, et en appliquant la formule ci-dessus avec un tel R, $|a_k| \leq \frac{2\pi R}{2\pi}\frac{\varepsilon}{R^{k+1}} \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $a_k = 0$ pour tout k, donc f est identiquement nulle.