UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2018-19
DEVOIR MAISON 1

A rendre le mardi 9 octobre

1. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique dans un disque $D(0,r)$, $r>0$, telle que pour tout $n>1/r$,

$$f(\frac{1}{n}) = e^{-n}. \tag{1}$$

a) Montrer que $f(0)=0$.
b) Montrer que pour tout $r' \in]0,r[$, il existe $z \in D(0,r')$ tel que $f(z) \neq 0$.
c) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$. Montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que $a_k \neq 0$.
d) On pose $k_0 := \min\{k : a_k \neq 0\}$. Calculer $\lim_{z\to 0} \dfrac{f(z)}{a_{k_0} z^{k_0}}$.
e) Aboutir à une contradiction et conclure.

2. Nous allons montrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique sur $\Omega := D(0,r) \setminus \{0\}$ (avec $r>0$) telle que $f(z)^2 = z$ pour tout $z \in \Omega$.
a) On pose $\Omega_1 := D(0,r) \setminus]-r,0]$ et $r_1(z) := \exp(\frac{1}{2} \operatorname{Log} z)$, $r_2(z) := -\exp(\frac{1}{2} \operatorname{Log} z)$. Montrer qu'il existe $j \in \{1,2\}$ tel que $f(z) = r_j(z)$ pour tout $z \in \Omega_1$ (utiliser le fait que si le produit de deux fonctions analytiques s'annule, alors une des deux fonctions est identiquement nulle).
b) En déduire que f ne peut pas être continue au point $-\frac{r}{2}$.

3. On considère une fonction f analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier. On suppose que $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$. On rappelle que ceci signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 : |z| \geq R \Rightarrow |f(z)| < \varepsilon.$$

Montrer en utilisant les inégalités de Cauchy en 0, que $f(z)=0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.