Solution Contrôle terminal 18.12.2019

1. D'après le Corollaire du théorème de Rouché avec $f(z) = z^7$, $g(z) = \frac{z^3}{8} + \frac{1}{1000}$, appliqué sur la courbe $C(0,1)$, comme
$$|g(z)| \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{1000} < 1 = |f(z)| ,$$
on a que f et $f+g = P$ ont le même nombre de zéros, donc P admet 7 zéros sur $D(0,1)$.

D'autre part, le même résultat appliqué sur $C(0,\frac{1}{2})$ avec $f_1(z) = \frac{z^3}{8}$ et $g_1(z) = z^7 + \frac{1}{1000}$ montre que, comme $|g_1(z)| \leq \frac{1}{2^7} + \frac{1}{1000} < \frac{1}{2^6} = |f_1(z)|$, la fonction $f_1+g_1 = P$ admet le même nombre de zéros que f_1 sur $D(0,\frac{1}{2})$, soit 3 zéros.

Donc P admet $7-3=4$ zéros sur $A(\frac{1}{2},1)$, comptés avec multiplicités.

D'autre part $P'(z) = 7z^6 - \frac{3}{8}z^2 = 7z^2(z^4 - \frac{3}{56})$

or $\left(\frac{3}{56}\right)^{1/4} < \left(\frac{3}{48}\right)^{1/4} = \left(\frac{1}{16}\right)^{1/4} = \frac{1}{2}$, donc tous les zéros de P' sont dans $D(0,\frac{1}{2})$ et les 4 zéros de P dans $A(\frac{1}{2},1)$ sont des zéros simples : ce sont bien 4 points distincts.

2. a) f admet une primitive ssi $\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0$ pour tout chemin fermé contenu dans $A(R_1, R_2)$.

Pour γ chemin dans $A(R_1,R_2)$, son image $\mathrm{Supp}\,\gamma$ est un compact de $A(R_1, R_2)$, donc $\sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k$ converge uniformément sur $\mathrm{Supp}\,\gamma$. Donc on peut échanger série et intégrale :

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \zeta^k\right) d\zeta$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_\gamma a_k \zeta^k\,d\zeta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int \zeta^k\,d\zeta.$$

Or $\forall\, k \neq -1$, ζ^k admet une primitive, $\frac{\zeta^{k+1}}{k+1}$. Donc tous les termes de la série ci-dessus sont nuls, sauf $a_{-1}\int \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i\, a_{-1}$, et ceci s'annule si et seulement si $a_{-1} = 0$.

b) (1) $f(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\sum_{k\geq 0} z^k = \sum_{k\geq -1} z^k$,

donc $a_{-1} = 1 \neq 0$: f n'admet pas de primitive.

(on peut aussi voir que $\int_{C(0,\frac{3}{2})} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \neq 0$ par la formule des résidus.)

(2) $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k\leq 0} \frac{1}{|k|!} z^k$,

donc $a_{-1} = 1 \neq 0$: f n'admet pas de primitive.

(3) $e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^k = \sum_{k\leq 0} \frac{1}{|k|!} z^{2k}$,

donc $a_{-1} = 0$: f admet une primitive.

(4) f bornée $\Rightarrow$ 0 est une singularité éliminable $\Rightarrow$ f est prolongée par $\tilde{f} \in \mathcal{H}(D(0,1))$, $D(0,1)$ convexe $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ admet une primitive F $\Rightarrow$ $F|_{A(0,1)}$ est une primitive de f.

3. a) Ω est connexe par arcs :

Si $z_1, z_2 \in \Omega$ avec $\mathrm{Im}\, z_1 > 0$, $\mathrm{Im}\, z_2 \geq 0$, alors le segment $[z_1 ; z_2] \subset \{\mathrm{Im}\, z > 0\} \cup \{z_2\} \subset \Omega$.

De même si $\mathrm{Im}\, z_1 \geq 0$, $\mathrm{Im}\, z_2 > 0$ (échanger les rôles) ou si $\mathrm{Im}\, z_1 < 0$, $\mathrm{Im}\, z_2 \leq 0$, ou si $\mathrm{Im}\, z_1 \leq 0$, $\mathrm{Im}\, z_2 < 0$.

Restent deux cas (à échange $z_1 \leftrightarrow z_2$ près) :

(1) $\mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2 = 0$: on prend $z_3 \in \Omega$ avec $\mathrm{Im}\, z_3 > 0$ et on relie z_1 à z_2 par la ligne brisée $[z_1 ; z_3] \cup [z_3 ; z_2]$.

(2) $\mathrm{Im}\, z_1 > 0$, $\mathrm{Im}\, z_2 < 0$: on prend $z_3 \in \Omega$ avec $\mathrm{Im}\, z_3 = 0$ et on relie z_1 à z_2 par la ligne brisée $[z_1 ; z_3] \cup [z_3 ; z_2]$.

b) $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i \neq 0$, or $z \longmapsto \frac{1}{z} \in \mathcal{H}(\Omega)$ et donc on a une fonction holomorphe dont l'intégrale sur un chemin fermé n'est pas nulle : Ω ne peut pas être simplement connexe.

c) φ_1 est bien définie sur $\mathbb{C} \setminus [-1, +1]$. Calculons son application inverse : $w = \dfrac{2}{1-z} \iff z = 1 - \dfrac{2}{w}$, pour $w \neq 0$.

Clairement $0 \notin \varphi(\Omega)$ (un inverse n'est jamais nul).

D'autre part $z \in [-1, 1[\iff -1 \leq 1 - \frac{2}{w} < 1$

$\iff -2 \leq -\frac{2}{w} < 0 \iff 1 \geq \frac{1}{w} > 0 \iff w \in [1, +\infty[$.

Donc $(\varphi^{-1})^{-1}(\Omega) = \varphi(\Omega) = \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup [1, +\infty[)$

d) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$, $z - 1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, ouvert sur lequel on peut définir arg dans l'intervalle $]0, 2\pi[$.

Donc $(z-1)^{1/2} := \exp\left(\frac{1}{2} \log |z-1| + \frac{i}{2} \arg z\right)$ est bien défini, et son argument appartient à $]0, \pi[$, càd que $\mathrm{Im}\, (z-1)^{1/2} > 0$.

Réciproquement, si $\operatorname{Im} w > 0$, alors $w^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ et $1 + w^2 \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$ avec $((1+w^2)-1)^{1/2} = w$.

On a bien une bijection.

e) Posons $\varphi_3(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$. Alors $\varphi_3(i) = 0$,

et
$$|\varphi_3(z)|^2 = \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} = \frac{|z+i|^2 - 2(z\bar{i} + \bar{z} i)}{|z+i|^2}$$
$$= 1 - \frac{-2iz + 2i\bar{z}}{|z+i|^2} = 1 - \frac{4 \frac{1}{2i}(z - \bar{z})}{|z+i|^2}$$
$$= 1 - 4\frac{\operatorname{Im} z}{|z+i|^2} < 1.$$

Calculons l'application réciproque : $w = \dfrac{z-i}{z+i}$

$\Leftrightarrow \quad w(z+i) = z - i \quad \Leftrightarrow \quad z(1-w) = i(1+w)$

$\Leftrightarrow \quad z = i\dfrac{1+w}{1-w}$.

Donc
$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Re}\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \frac{\operatorname{Re}((1+w)(1-\bar{w}))}{|1-w|^2}$$
$$= \frac{\operatorname{Re}(1 + w - \bar{w} - |w|^2)}{|1-w|^2} = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2} > 0 \text{ pour } |w| < 1 :$$

tout point de $D(0,1)$ a bien un unique antécédent dans $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Comme $\varphi_3 \circ \varphi_2(0) = \varphi_3(i) = 0$, $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(\Omega) = D(0,1) \setminus \{0\}$.

$$\lim_{z \to \infty} \varphi_1(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{z}{1-z} = 0, \text{ donc}$$
$$\lim_{z \to \infty} \varphi_2 \circ \varphi_1(z) = \lim_{z_1 \to 0} \varphi_2(z_1) = (-1)^{1/2} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i,$$
car l'unique argument de -1 dans $]0, 2\pi[$ est π.
$$\lim_{z \to \infty} \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z) = \lim_{z_2 \to i} \varphi_3(z_2) = \frac{i-i}{i+i} = 0.$$

f) $f_1 \circ \varphi^{-1}$ est définie sur $D(0,1) \setminus \{0\}$ puisque $\varphi(\Omega) = D(0,1) \setminus \{0\}$. $f_1 \circ \varphi^{-1}$ est bornée au voisinage de 0, puisque
$$\lim_{w \to 0} \varphi^{-1}(0) = \lim_{w \to 0} \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1}\left(i\frac{1+w}{1-w}\right)$$
$$= \lim_{w_1 \to i} \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1}(w_1) = \lim_{w_1 \to i} \varphi_1^{-1}(1 + w_1^2)$$

$= \lim_{w_2 \to 0} \varphi_1^{-1}(0) = \lim_{w_2 \to 0} \left(1 - \frac{2}{w_2}\right) = \infty$,

et $\lim_{w_3 \to \infty} f_1(w_3) = \lim_{w_3 \to \infty} \left(1 - \frac{1}{w_3^2}\right) = 1$:

donc $f_1 \circ \varphi^{-1}$ admet une limite finie en 0, donc le théorème de la singularité éliminable nous donne une fonction $\tilde{f}_1 \in \mathcal{H}(D(0,1))$ qui étend $f_1 \circ \varphi^{-1}$

D'autre part, $\tilde{f}_1(z) \neq 0 \quad \forall z \in D(0,1)$ puisque $f_1(w) \neq 0 \quad \forall w$ et $\tilde{f}_1(0) = \lim_{w \to 0} f_1 \circ \varphi^{-1}(w) = 1 \neq 0$.

Donc $\tilde{f}_1$ admet une racine carrée holomorphe g sur $D(0,1)$, et pour $z \in \Omega$,

$(g \circ \varphi(z))^2 = \tilde{f}_1(\varphi(z)) = f_1 \circ \varphi^{-1}(\varphi(z))$ car $\varphi(z) \neq 0$

$= f_1(z)$, cqfd : $g \circ \varphi$ est la racine cherchée.

g) $f_2(z) = z^2 f_1(z)$, donc $g_1(z) := z \cdot g \circ \varphi(z)$ donne la racine voulue.

4) a) Si $f(D(0,1) \setminus \{0\}) \subset A(1,2)$, alors $|f(z)| < 2 \quad \forall z$, donc f est bornée au voisinage de 0, donc le théorème la singularité éliminable montre que f se prolonge ~~en~~ $\tilde{f}$ avec $\tilde{f}(0) = \lim_{z \to 0} \tilde{f}(z)$, donc $\tilde{f}(0) \in \bar{A}(1,2)$.

b) Si $z_0 = \tilde{f}(0) \in A(1,2)$, alors comme f est bijective, $z_1 := f^{-1}(\tilde{f}(0)) \in D(0,1) \setminus \{0\}$.

Comme $\tilde{f}$ est non-constante, $\tilde{f}(D(0,r))$ contient

un voisinage de z_0, disons $D(z_0,\varepsilon)$ pour un certain $\varepsilon>0$. f étant une bijection, $f^{-1}(D(z_0,\varepsilon))$ $\subset D(0,1)\setminus\{0\}$ et f^{-1} étant holomorphe par le théorème sur les inverses de fonctions holomorphes, si $|z'-z_0|<\varepsilon_1$ alors $|f^{-1}(z')-f^{-1}(z_0)|<\frac{1}{2}|z_1|$, autrement dit $|f^{-1}(z')-z_1|<\frac{1}{2}|z_1|$.
Mais d'autre part $f^{-1}(D(z_0,\varepsilon))\subset f^{-1}(f(D(0,r)))=D(0,r)$
donc $|f^{-1}(z')|<\frac{1}{2}|z_1|$ en particulier : contradiction.

c) Comme $\tilde{f}(0)\in\bar{A}(1,2)\setminus A(1,2)$, d'après les questions a et b, on a $|\tilde{f}(0)|=1$ ou 2.
Mais alors dans les 2 cas, pour tout $\varepsilon>0$, $D(\tilde{f}(0),\varepsilon)\not\subset\bar{A}(1,2)$ alors que d'après b) pour ε assez petit, $D(\tilde{f}(0),\varepsilon))\subset\tilde{f}(D(0,r))\subset\tilde{f}(D(0,1))$ $\subset\bar{A}(1,2)$, contradiction.