UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL NOTES DE COURS POUR "ANALYSE HILBERTIENNE"

PASCAL J. THOMAS

Avertissement. Ces notes donnent un résumé de cours concernant la Transformée de Fourier et un certain nombre de sujets liés. Toutes les démonstrations ne sont pas nécessairement données. Certains théorèmes importants sont admis.

0. Pré-requis

0.1. **Dérivées et intégrales de fonctions à valeurs complexes.** On rappelle que pour un nombre complexe $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $\bar{z} := x - iy$, $|z|^2 := z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors on écrit $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, où $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{R}$, et on définit (quand f_1 et f_2 sont intégrables, resp. dérivables)

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b f_1(x)dx + i\int_a^b f_2(x)dx, \quad f'(x) := f_1'(x) + if_2'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Les formules habituelles (dérivations d'une somme, d'un produit, de $1/f$, théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, intégrale d'une somme, intégration par parties, changement de variable...) sont valables dans ce cadre.

Nous avons un problème pour la dérivée d'une fonction composée $g \circ f$: il faut désormais que g soit une fonction à variable complexe, et que signifie sa dérivée dans ce cas ? Nous renvoyons au cours de fonctions holomorphes pour une étude de cette question.

Toutefois, les formules sur les produits nous permettent de voir que $\frac{d}{dx}(f(x))^n = nf'(x)(f(x))^{n-1}$, comme d'habitude. Un autre cas particulier très important est celui de $e^{f(x)}$.

0.2. **Exponentielle complexe.** On définit la fonction e^z comme l'unique fonction telle que $e^0 = 1$, $e^{z+w} = e^z e^w$, et $\lim_{z\to 0}(e^z - 1)/z = 1$. Nous admettrons l'unicité. L'existence découle de

Théorème 0.1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Des propriétés définissantes de l'exponentielle, on déduit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^z(e^h - 1)}{h} = e^z,$$

donc l'exponentielle est dérivable au sens complexe et on peut montrer facilement que $(e^f)' = f'e^f$.

On remarque que $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, et donc $|e^{iy}|^2 = e^{iy}e^{-iy} = 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions trigonométriques par

$$\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$

et on voit que quand $z \in \mathbb{R}$ on a bien les propriétés des fonctions trigonométriques usuelles.

0.3. **Intégrales impropres.** Ce sujet a été traité dans le cours d'analyse de Fourier du S3.

Soit $a \in \mathbb{R}$, et f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. On pose, si la limite existe dans $\mathbb{R}$,

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt := \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(t)dt.$$

On dira que f est *intégrable* sur $[a, +\infty[$ si la limite existe (et donc est finie). On dira (parfois) que f est *absolument intégrable* si $|f|$ est intégrable. L'intégrabilité absolue implique l'intégrabilité, et la réciproque est fausse.

On pose des définitions analogues pour $\int_{-\infty}^a f(t)dt$.

On dira que f est intégrable sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ si f est à la fois intégrable sur $[a, +\infty[$ et sur $]-\infty, a]$ (on prend souvent $a = 0$, parfois on découpe en plusieurs intervalles : les intervalles bornés ne posent pas de problème).

Attention, le fait que f soit intégrable sur $\mathbb{R}$ implique que $\lim_{A \to +\infty} \int_a -A^A f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$, mais la réciproque est fausse en général. Les deux propriétés ne sont équivalentes que pour l'absolue intégrabilité (exercice).

Exemples : $f_1(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Attention ! Si f tend vers une limite à l'infini et est intégrable, cette limite doit être 0. Mais il existe des fonctions intégrables qui n'ont pas de limite à l'infini.

Propriétés : on obtient en passant à la limite les propriétés habituelles de changement de variables et d'intégration par parties. Attention aux bornes ! Il vaut mieux refaire le processus de limite si on n'est pas sûr du résultat.

Nous allons souvent utiliser le résultat suivant, qui a été vu par les étudiants de l'option mathématiques et que les physiciens devront admettre :

Théorème 0.2. *(Dérivation sous l'intégrale)*

Soit $(x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction sur $I \times J$ (I, J intervalles), continue par morceaux en x et intégrable sur I pour t fixé ; continument dérivable en t pour x fixé.

On suppose qu'il existe une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$, intégrable sur I, telle que pour tout $t \in J$, $x \in I$, $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\right| \leq g(x)$. Alors

$$\frac{d}{dt} \int_I f(x, t)dt = \int_I \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)dx.$$

Remarque : si I et J sont fermés et bornés et $\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)$ continue, elle est bornée par une constante et le théorème s'applique facilement. Mais nous aurons besoin de l'appliquer sur des intervalles I non-bornés, notamment la droite réelle.

1. Transformée de Fourier, définition et premières propriétés

1.1. **Motivation.** Nous allons vouloir étudier l'analogue des coefficients de Fourier pour un signal non-périodique, a priori défini sur toute la droite réelle. Toutefois, on va le supposer d'énergie finie, et même dans un premier temps représenté par une fonction f absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

Une première idée peut être d'approximer cette fonction f par sa restriction à un intervalle $[-T/2, T/2]$ avec T très grand, et à traiter ceci comme une fonction périodique de période T. Ses coefficients de Fourier seront donnés par

$$c_{n,T}(f) := \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i n \frac{t}{T}} \frac{1}{T} dt.$$

Si f est assez régulière, ces coefficients décroissent rapidement et on peut écrire la fonction comme somme de sa série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{n,T}(f) e^{2\pi i n \frac{t}{T}},$$

et si on pose

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt,$$

la formule d'avant se réécrit

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{T} \hat{f}(\frac{n}{T}) e^{2\pi i n \frac{t}{T}}.$$

Si on fait tendre T vers l'infini, on peut voir (en utilisant les sommes de Riemann et la décroissance des coefficients) que ceci tend vers

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi t} dt.$$

Un de nos objectifs sera d'obtenir, pour des classes de fonctions assez larges une démonstration de cette formule de "reconstruction" de la fonction f à partir de sa transformée $\hat{f}$.

1.2. **Définition.**

Définition 1.1. Soit f une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles ou complexes), on pose

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt,$$

et on appelle $\hat{f}$ la *Transformée de Fourier* de f.

On notera parfois $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ (surtout quand f sera remplacée par une formule un peu longue).

On remarque que cette intégrale converge car $|f(t)e^{-2\pi i \xi t}| = |f(t)|$, et par conséquent $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$.

Notons aussi que $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

1.3. **Opérations de base.** Dans la proposition qui suit, par abus de notation, des expressions comme "$f(x+h)$" signifient "la fonction qui à x associe $f(x+h)$".

Proposition 1.2. Soit $f$telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ converge. Alors

(1) Pour $h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f(x+h)) = e^{2\pi i\xi h}\hat{f}(\xi)$.
(2) Pour $\delta > 0$, $\mathcal{F}(f(\delta x)) = \frac{1}{\delta}\hat{f}(\frac{\xi}{\delta})$.
(3) $\mathcal{F}(e^{-2\pi i x h}f(x)) = \hat{f}(\xi+h)$.
(4) Si de plus f est dérivable et que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|dx$ converge, $\mathcal{F}(f'(x)) = 2\pi i\xi\hat{f}(\xi)$.
(5) Si de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|dx$ converge, $\mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi) = \frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$.

Démonstration.

(2) : on procède au changement de variable $t = \delta x$, $dt = \delta dx$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta x)e^{-2\pi i\xi x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{t}{\delta})e^{-2\pi i\frac{\xi t}{\delta}}\frac{1}{\delta}dt.$$

(4) : On intègre par parties : $u = e^{-2\pi i\xi x}$, $u' = -2\pi i\xi e^{-2\pi i\xi x}$, $v' = f'$, $v = f$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-2\pi i\xi x}dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-2\pi i\xi)e^{-2\pi i\xi x}dx;$$

cette formule est justifiée parce que l'intégrale qui apparaît dans le membre de gauche est absolument convergente, et parce que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

(5) : on utilise la dérivation sous l'intégrale :

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-2\pi i x)e^{-2\pi i\xi x}dx = \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi).$$

$\square$

1.4. **Lemme de Riemann-Lebesgue.** Nous allons donner une version d'un résultat important, qui se retrouve dans des cadres plus généraux. La démonstration est plus délicate que la plupart de celles que nous ferons.

Théorème 1.3. *Si f et continue et que f est* absolument intégrable *sur $\mathbb{R}$, alors $\hat{f}$ est continue et* $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Idée de la démonstration :

L'hypothèse dit que $\int_{|x|\geq A} |f(x)|dx$ est petite pour A assez grand. La remarque après la définition de la série de Fourier — $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f|$ — montre donc que si on choisit un $\varepsilon' > 0$, on peut prendre $A > 0$ assez grand pour que $\left|\mathcal{F}(f\mathbf{1}_{]-\infty,-A[\cup]A,+\infty[})(\xi)\right| \leq \varepsilon'$ pour tout ξ. On peut donc, pour les deux propriétés voulues, se ramener à une fonction à support borné, $f\mathbf{1}_{[-A,A]}$.

Pour démontrer la continuité, on estime $|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi+h)|$ grâce à la Proposition 1.2(3). Pour démontrer que $\hat{f}$ tend vers zéro à l'infini, il faut utiliser l'uniforme continuité de $f\mathbf{1}_{[-A,A]}$, qui est donnée par le théorème de Heine (cf. ci-dessous) et approximer f par une fonction en escalier, car la transformée de Fourier d'une telle fonction en escalier, explicitement connue, sera petite à l'infini (et celle de la différence bornée par un nombre petit, toujours par la remarque initiale).

On peut aussi approximer f par une fonction $\mathcal{C}^1$, dont on voit que la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini en faisant une intégration par parties (ou en appliquant la Proposition 1.2(4)).

1.5. **Appendice : Uniforme continuité, Théorème de Heine.**

Définition 1.4. On dit qu'une fonction f est *uniformément continue* sur un ensemble I si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x, y \in I$ et $|x-y| \leq \delta$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Commentaire : cela ressemble beaucoup à la définition de la continuité, et de fait cela implique la continuité (ordinaire), mais c'est plus fort. La différence est que d'habitude δ dépend de x (et de ε), alors qu'ici un même δ dépendant de ε est valable pour tous les $x \in I$.

Exemples : $f(x) = ax + b$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ($\delta = \varepsilon/|a|$ marchera), $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[-1, +1]$ ($\delta = \varepsilon/4$ par exemple), mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (pour tout δ donné, si $x \geq \frac{1}{\delta}$, alors $(x+\delta/2)^2 > x + 1$).

Théorème 1.5. *(Théorème de Heine)*
Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue.

2. Espace de Schwartz, inversion, convolution

2.1. Espace de Schwartz. Pour utiliser commodément les propriétés de la Proposition 1.2, on va se placer dans un espace qui est stable par les deux opérations de base que sont la dérivation et la multiplication par la variable x. Nous allons voir que la transformation de Fourier enverra cet espace dans lui-même, et mieux encore : que c'est une bijection, et isométrique dans un sens à définir.

On rappelle que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment (continûment) dérivables.

Définition 2.1. L'espace de (Laurent) Schwartz est défini par

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall k, n \in \mathbb{N}, x^n f^{(k)}(x) \text{ est bornée sur } \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque : cette définition implique aussi que pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, la fonction $x^n f^{(k)}(x)$ tend vers zéro à l'infini, et est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ (il faut appliquer la définition en changeant les valeurs de n).

Proposition 2.2. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème 2.3. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Il faut voir que la fonction $\xi^n \left(\frac{d}{d\xi}\right)^k \hat{f}(\xi)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Or d'après la Proposition 1.2, cette fonction est la transformée de Fourier de $\frac{1}{(2\pi i)^n} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[(-2\pi i x)^k f(x)\right]$, et donc doit être bornée par la remarque initiale après la définition 1.1. $\square$

2.2. **Gaussiennes et identité approchée.**

Proposition 2.4. Soit $G(x) := e^{-\pi x^2}$ (gaussienne). Alors $G \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\hat{G}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$ (autrement dit, la gaussienne est sa propre transformée de Fourier).

Démonstration. Pour voir que $G \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on démontre par récurrence que $G^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-\pi\xi^2}$, où P_k est un polynôme de degré borné par k.

Pour calculer la transformée de Fourier, posons $F(\xi) := \hat{G}(\xi)$. Alors, en appliquant la Proposition 1.2,

$$F'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi x}(-2\pi i x)e^{-\pi x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ie^{-2\pi i\xi x}G'(x)dx = i\cdot(2\pi i\xi)\hat{G}(\xi) = -2\pi\xi F(\xi).$$

On a donc une équation différentielle pour F, et on sait que $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1$. La solution est unique, et vaut $F(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$. $\square$

Un corollaire immédiat (en utilisant la Proposition 1.2 (2)) est que si on pose $G_\delta(x) := e^{-\pi\delta x^2}$, pour $\delta > 0$, alors

$$\hat{G}_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi\frac{x^2}{\delta}} =: K_\delta(x), \text{ and } \hat{K}_\delta(x) = G_\delta(x).$$

Définition 2.5. Une famille de fonctions $(\rho_\delta)_{\delta>0}$ est appelée *identité approchée* si et seulement si :

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\delta(x)dx = 1$ et $\rho_\delta(x) \geq 0$;
(2) Pour tout $\eta > 0$, $\lim_{\delta\to 0}\int_{|x|>\eta}\rho_\delta(x)dx = 0$.

Proposition 2.6. La famille (K_δ) fournit une identité approchée.

Nous allons avoir besoin d'un outil important, le **produit de convolution.** *Certaines propriétés en seront données plus bas.*

Définition 2.7. Si g est une fonction telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|dx$ converge, et si f est une fonctions bornée, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $M_f > 0$ tel que $|f(x)| \leq M_f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on pose

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

Proposition 2.8. Si $(\rho_\delta)_{\delta>0}$ est une identité approchée, et si f est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\lim_{\delta\to 0} f * \rho_\delta(x) = f(x)$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Remarque : si f est continue et $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, alors f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (exercice).

Idée de la démonstration :

$$\begin{aligned}|f * K_\delta(x) - f(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x-t) - f(x))\,K_\delta(t)dt\right| \\ &\leq \int_{|t|\geq\eta}|f(x-t) - f(x)|\,K_\delta(t)dt + \int_{|t|\leq\eta}|f(x-t) - f(x)|\,K_\delta(t)dt.\end{aligned}$$

Par uniforme continuité, on prend $\eta > 0$ suffisamment petit pour que $|t| \leq \eta$ implique $|f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. Donc le deuxième terme est majoré par $\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}$.

Cet η étant fixé, on prend δ assez petit pour que

$$\int_{|t|\geq\eta} K_\delta(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty},$$

ce qui implique que le premier terme est lui aussi majoré par $\varepsilon/2$. □

2.3. **Un théorème à la Fubini.** Nous allons devoir admettre un théorème sur les intégrales en deux variables.

Considérons une fonction $F(x,y)$ de deux variables sur un produit d'intervalles ouverts $I \times J$. La fonction F est supposée intégrable (et donc bornée) sur tout ensemble de la forme $I_0 \times J_0$, où $I_0 \subset I$, $J_0 \subset J$ sont des intervalles fermés et bornés. Nous savons déjà (d'après le cours de calcul différentiel du S3) que

$$\int_{J_0}\left(\int_{I_0} F(x,y)dx\right)dy = \int_{I_0}\left(\int_{J_0} F(x,y)dy\right)dx,$$

et ce nombre définit $\int_{I_0\times J_0} F(x,y)dxdy$. Mais nous considérons maintenant des intervalles I, J qui peuvent ne pas être bornés, et aux extrémités de I et J la fonction F peut aussi tendre vers l'infini.

Théorème 2.9. *Supposons que pour tout $y \in J$, $\sup_{I_0\subset I}\int_{I_0}|F(x,y)|dx < +\infty$ (autrement dit, la fonction $F(\cdot,y)$ est absolument intégrable sur I), et que*

$$\sup_{J_0\subset J}\int_{J_0}\left(\sup_{I_0\subset I}\int_{I_0}|F(x,y)|dx\right)dy < +\infty$$

(autrement dit, la fonction $y \mapsto \int_I |F(x,y)|dx$ est intégrable sur J), alors la fonction $x \mapsto \int_J |F(x,y)|dy$ est intégrable sur I et on a

$$\int_J\left(\int_I F(x,y)dx\right)dy = \int_I\left(\int_J F(x,y)dy\right)dx.$$

Par exemple, si les intégrales itérées de la valeur absolue (prises dans un ordre ou autre) convergent, on peut faire l'intégrale d'une fonction de deux variables sur le plan tout entier en commençant par l'une ou l'autre variable (et en intégrant par rapport à la seconde ensuite), tout sera bien défini, et on obtiendra le même résultat avec les deux procédés.

Attention, tout ceci peut échouer si on n'a pas la convergence de l'intégrale de $|F|$. Prenons par exemple sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

$$f(x,y) := \sin(x-y) \text{ pour } y \leq x \leq y + 2\pi, \quad f(x,y) := 0 \text{ ailleurs.}$$

On calcule facilement que $\int_0^{+\infty} f(x,y)dx = 0$ (l'intégrale est prise en fait sur un intervalle fini), et donc $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)dxdy = 0$.

D'autre part, $\int_0^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{x-2\pi}^{x}\sin(x-y)dy = 0$ pour $x \geq 2\pi$, mais pour $x < 2\pi$ on trouve $\int_0^x \sin(x-y)dy = 1-\cos x$. Ce qui implique $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)dydx = \int_0^{2\pi}(1-\cos x)dx = 2\pi$: les intégrales itérées convergent toutes les deux, mais leurs valeurs sont différentes.

C'est le même phénomène que celui qui se produit avec les séries semi-conergentes : en changeant l'ordre de sommation, on peut changer le résultat.

2.4. **Formule d'inversion.**

Proposition 2.10. (Formule de multiplication)
Soient f et g absolument intégrables sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)g(y)dy.$$

Remarquons que les deux intégrables ci-dessus sont absolument convergentes, car f est absolument intégrable et $\hat{g}$ est bornée, et vice-versa.

Bien entendu, un cas (très) particulier des hypothèses est celui où $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Posons $F(x,y) := f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}$. Alors $|F(x,y)| = |f(x)||g(y)|$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx\right) dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|dy\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx\right).$$

On peut donc appliquer le Théorème 2.9. $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)dy = f(x)\hat{g}(x)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)dx = \hat{f}(y)g(y)$, et on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)g(y)dy.$$

□

Théorème 2.11. *Si f et $\hat{f}$ sont absolument intégrables sur $\mathbb{R}$ (en particulier, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), alors*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi.$$

Démonstration. Par un changement de variable $x \mapsto -x$ et grâce à la parité de K_δ,

$$f * K_\delta(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)K_\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)K_\delta(-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)K_\delta(x)dx.$$

On applique la formule de multiplication avec $g = G_\delta$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)K_\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)G_\delta(y)dy.$$

On a déjà vu que $\lim_{\delta\to 0} f * K_\delta(0) = f(0)$.

On sait que $\lim_{\delta\to 0} G_\delta(y) = 1$, et on veut passer la limite "à l'intérieur de l'intégrale". Une application du Théorème des Accroissements Finis montre que $|e^{-x} - 1| \leq x$ pour tout $x \geq 0$. Donc $|G_\delta(y) - 1| \leq \pi\delta A^2$ pour $|y| \leq A$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on choisit A assez grand pour que

$$\int_{|y|\geq A} |\hat{f}(y)G_\delta(y)|dy \leq \int_{|y|\geq A} |\hat{f}(y)|dy < \varepsilon/4,$$

et on a d'autre part, une fois A fixé,

$$\left|\int_{-A}^{A}\hat{f}(y)dy-\int_{A}^{A}\hat{f}(y)G_\delta(y)dy\right|\leq\int_{-A}^{A}|\hat{f}(y)||1-G_\delta(y)|dy$$
$$\leq\pi\delta A^2\int_{-A}^{A}|\hat{f}(y)|dy\leq\pi\delta A^2\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(y)|dy<\varepsilon/2$$

pour δ assez petit.

(On peut aussi démontrer la convergence plus rapidement en appliquant le théorème de convergence dominée).

Nous avons donc établi $f(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(y)dy$, c'est le cas $x=0$ de notre théorème.

Pour obtenir le cas général, on pose $f_x(t):=f(x+t)$. On applique ce qu'on vient de démontrer à cette fonction de t, en se rappelant que $\hat{f}_x(\xi)=e^{2\pi ix\xi}\hat{f}(\xi)$:

$$f(x)=f_x(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}_x(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi.$$

□

Nous avons en fait établi que la transformée de Fourier est une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour le voir, nous avons besoin d'une notation : on pose $\check{f}(x):=f(-x)$. Le changement de variable $x'=-x$ nous montre que

(1)
$$\mathcal{F}(\check{f})(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(-x)e^{-2\pi i\xi x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x')e^{2\pi i\xi x'}dx'=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x')e^{-2\pi i(-\xi)x'}dx'=\hat{f}(-\xi).$$

Proposition 2.12. La transformation de Fourier est une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et son application inverse est donnée par $f\mapsto\mathcal{F}(\check{f})$.

Démonstration. On sait déjà que $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'après le Théorème 2.3.

Le théorème 2.11, et l'équation (1) appliquée à $\hat{f}$ au lieu de f, montrent que toute fonction $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est la transformée de Fourier de $(\hat{f})\check{}$. Donc $\mathcal{F}$ est surjective.

D'autre part, si $\hat{f}=\hat{g}$, alors $(\hat{f})\check{}=(\hat{g})\check{}$, et en appliquant la transformée de Fourier aux deux côtés de l'équation, on voit que $f=g$, donc $\mathcal{F}$ est bijective sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

2.5. **Formule de Plancherel.**

Théorème 2.13. *Soient f, $\hat{f}$, g et $\hat{g}$ sont absolument intégrables, alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi.$$

En particulier, si $f=g$, on voit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

Donc la transformation de Fourier est une isométrie pour la norme définie par $\|f\|^2:=\int|f|^2$.

Démonstration. En utilisant le fait que $\overline{\int f} = \int \overline{f}$, on voit facilement que $\overline{g(x)} = \mathcal{F}(\bar{\hat{g}})(x)$ (on utilise la formule d'inversion pour g). Donc, d'après la formule de multiplication,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathcal{F}(\bar{\hat{g}})(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\overline{g(x)}.$$

□

2.6. **Propriétés du produit de convolution.** Remarque : beaucoup d'autres propriétés du produit de convolution sont traitées en Travaux Dirigés (Feuille numéro 3).

Proposition 2.14. Soient f, g deux fonctions bornées telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|$ converge.

Alors $f * g(x) = g * f(x)$.

Démonstration. Pour x fixé, on fait le changement de variable $u = x - t$. Alors

$$f{*}g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x{-}t)g(t)dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(u)g(x{-}u)(-du) \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x{-}u)du = g{*}f(x).$$

□

Théorème 2.15. *Soient f, g deux fonctions bornées telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|$ converge. On suppose de plus que f est dérivable et que sa dérivée f' est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. Alors $f * g$ est dérivable et que*

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = f' * g(x).$$

Démonstration. On va appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale. Les hypothèses impliquent que pour tout $x, t \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x-t)g(t)| \leq \sup_{\mathbb{R}} |f'||g(t)|,$$

donc on a l'hypothèse de domination par une fonction intégrable indépendante de x, donc $f * g(x)$ est dérivable et

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x-t)g(t)dt = f' * g(x).$$

□

2.7. **Transformée de Fourier d'une convolution.**

Théorème 2.16. *Si f et g sont absolument intégrables et bornées, alors $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.*

Démonstration. On veut appliquer le théorème de Fubini pour changer l'ordre dans l'intégrale double

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} f(x-t)g(t)dtdx.$$

En effet,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-2\pi i x\xi}f(x-t)g(t)\right|dxdt = \int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-t)|\,dxdt$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx\right) < +\infty.$$

On a alors, d'après les définitions de la transformée de Fourier et du produit de convolution,

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt\right)dx,$$

ce qui donne en appliquant le changement d'ordre dans l'intégration, puis la propriété sur la transformée de Fourier de $f(x-t)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)e^{-2\pi i x\xi}dx\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2\pi i t\xi}\hat{f}(\xi)dt = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

□

Corollaire 2.17. Si $f, g, \hat{f}, \hat{g}$ sont absolument intégrables (en particulier si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), alors $\widehat{fg}(\xi) = \hat{f}(\xi) * \hat{g}(\xi)$.

Démonstration. On remarque que $\hat{f}\hat{g}$ est absolument intégrable, par exemple parce que $\hat{f}$ est absolument intégrable et $\hat{g}$ est bornée.

D'autre part, si u et v sont absolument intégrables et bornées, alors $\check{u} * \check{v} = (u * v)\check{}$. En effet, en faisant le changement de variable $t' = -t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(-(x-t))v(-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(-x-t'))v(t')dt' = u * v(-x).$$

On a vu en TD (Feuille 3) que si f et g sont absolument intégrables, alors $f * g$ l'est aussi.

Donc, d'après le théorème sur la transformée de Fourier d'un produit de convolution, $\mathcal{F}\left((\hat{f} * \hat{g})\check{}\right) = \mathcal{F}\left((\hat{f})\check{} * (\hat{g})\check{}\right) = \mathcal{F}\left((\hat{f})\check{}\right)\mathcal{F}\left((\hat{g})\check{}\right) = fg$, d'après le théorème d'inversion de Fourier.

En appliquant la transformée de Fourier des deux côtés, et à nouveau le théorème d'inversion de Fourier au premier terme, on voit que $\hat{f} * \hat{g} = \mathcal{F}(fg)$. □

3. Espaces de Hilbert

La quantité $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx$ joue le rôle d'une norme au carré. Mais l'espace des fonctions est de dimension infinie.

Notre but est de donner ici un aperçu de la théorie des espaces de Hilbert, qui généralisent les espaces euclidiens que vous connaissez déjà. Les difficultés spécifiques sont que la convergence des suites peut être problématique, et qu'on ne peut pas trouver de base finie, ce qui conduit à la notion de *base hilbertienne* (différente de celle de base au sens habituelle).

3.1. **Produit hermitien.** Nous faisons ici quelques rappels de ce qui a déjà été vu en cours d'algèbre linéaire.

On se place dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$.

Définition 3.1. Une application $E\times E \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à un couple de vecteurs (x, y) associe le scalaire $\langle x, y\rangle$ est dite *produit hermitien* (ou scalaire, ou intérieur) si et seulement si

(1) Pour tout $y \in E$, $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire ;
(2) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$;
(3) $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

On appelle *norme* d'un vecteur le réel positif $\|x\| := \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$.

La distance de deux vecteurs x, y est donnée par $\|x - y\|$.

Exemple 3.2. (1) $E = \mathcal{C}([a, b])$, $\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$.
(2) $E = \mathbb{C}[X]|_{\mathbb{R}}$ (les polynômes à coefficients complexes, de variable réelle), $\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\overline{Q(x)}e^{-x^2}dx$.
(3) $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$.

Théorème 3.3. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*
Pour tous $x, y \in E$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

Proof. Pour $x, y \in E$, $t, \theta \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \langle x + te^{i\theta}y, x + te^{i\theta}y\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\langle x, y\rangle\right) + t^2\langle y, y\rangle.$$

On choisit θ tel que $e^{-i\theta}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$, et comme nous avons un trinôme de signe constant, son discriminant est négatif ou nul, donc

$$\Delta = 4|\langle x, y\rangle|^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0,$$

ce qui démontre le résultat voulu en passant aux racines carrées. □

Un corollaire de cette inégalité est que la "distance" que nous avons définie ci-dessus vérifie bien *l'inégalité triangulaire* : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, et par conséquent aussi $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.

Il existe de nombreuses autres sortes de "normes" qui n'ont pas toutes les bonnes propriétés des normes provenant d'un produit scalaire. La propriété suivante caractérise en fait ces dernières (mais nous ne le montrerons pas).

Proposition 3.4. (Identité du parallélogramme)
Pour tous vecteurs $x, y \in E$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Démonstration.

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

□

Une autre propriété des normes issues d'un produit hermitien (ou scalaire) est la suivante.

Théorème 3.5. *(Unicité de la projection)*

Soit V un sous-espace vectoriel de E, $x_0 \in E$. Si il existe $y_0 \in V$ qui réalise la plus courte distance de x_0 à V, c'est-à-dire

$$\|x_0 - y_0\| = \min_{y \in V} \|x_0 - y\|,$$

y_0 est unique, et est l'unique vecteur $y \in V$ tel que $x_0 - y$ soit orthogonal à V, c'est-à-dire que

$$\langle x_0 - y, z \rangle = 0, \text{ pour tout } z \in V. \tag{2}$$

De plus, si $(p_n)_n \subset V$ avec $\lim_{n\to\infty} \|p_n - x\| = \inf_{p \in V} \|x - p\|$ (suite minimisante), la suite $(p_n)_n$ est de Cauchy.

Le vecteur y_0 est appelé *projection (orthogonale)* de x_0 sur V.

Démonstration. Soient p_0 et $p_1 \in V$, $x_0 \in E$. On applique l'identité du parallélogramme avec $x = p_0 - x_0$ et $y = p_1 - x_0$. Alors

$$\|p_0 - x_0 + p_1 - x_0\|^2 = 2\|p_0 - x_0\|^2 + 2\|p_1 - x_0\|^2 - \|p_0 - p_1\|^2,$$

donc en divisant par 4,

$$\left\| \frac{p_0 + p_1}{2} - x_0 \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \left(\|p_0 - x_0\|^2 + \|p_1 - x_0\|^2 \right) - \frac{1}{4} \|p_0 - p_1\|^2.$$

En particulier, si on pose $m := \operatorname{dist}(x_0, V) := \inf_{p \in V} \|x - p\|$, alors si $\|p_0 - x_0\|^2, \|p_1 - x_0\|^2 \leq m^2 + \delta$, on aura

$$\|p_0 - p_1\|^2 = 2 \left(\|p_0 - x_0\|^2 + \|p_1 - x_0\|^2 - 2 \left\| \frac{p_0 + p_1}{2} - x_0 \right\|^2 \right) \leq 2m^2 + 2\delta - 2m^2 = 2\delta.$$

Ceci a deux conséquences : si la borne inférieure est atteinte par p_0, p_1 tels que $m = \|p_0 - x_0\| = \|p_1 - x_0\|$, alors $p_0 = p_1$; et toute suite minimisante est une suite de Cauchy (cf. Définition 3.6), ce qu'on voit en remplaçant p_0, p_1 par des éléments p_n, p_q d'une suite minimisante avec $n, q \geq N$ assez grand pour que $\|p_n - x\|, \|p_q - x\| \leq m + \varepsilon^2/2$.

Pour montrer les affirmations sur l'orthogonalité, supposons d'abord que (2) soit vérifiée pour un y_0. Alors pour tout $y \in V$, $y - y_0 \in V$, donc $\langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle = 0$ et par Pythagore, $\|x - y\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2 \geq \|x - y_0\|^2$, ce qui montre que y_0 réalise la plus courte distance.

Réciproquement, si y_0 réalise la plus courte distance, pour tout $z \in V$, $t, \theta \in \mathbb{R}$,

$$\|x - y_0\|^2 \leq \|x - y_0 + te^{i\theta} z\|^2 = \|x - y_0\|^2 + 2t \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} \langle x - y_0, z \rangle\right) + t^2 \|z\|^2,$$

donc comme l'expression à droite est minimale pour $t = 0$, sa dérivée doit s'annuler : $\operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} \langle x - y_0, z \rangle\right) = 0$ pour tout θ. Ceci implique que $\langle x - y_0, z \rangle = 0$. □

Attention ! il se pourrait très bien qu'aucune projection n'existe. Par exemple, prenons E l'espace des fonctions continues par morceaux (et donc bornées) sur $[-1, 1]$, muni du même produit hermitien que dans l'exemple (1), et V le sous-espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$. Alors si on prend $f_0 = \chi_{[0,1]}$, elle n'a pas de projection sur V. La raison est qu'on peut approcher f_0 d'aussi près qu'on veut par des fonctions continues ; la projection "devrait" donc être f_0 elle-même, mais elle n'est pas dans V, puisque discontinue.

3.2. **Espaces complets et de Hilbert.** On rappelle les notions topologiques de suite de Cauchy et d'espace complet :

Définition 3.6. Une suite (u_n) est dite *suite de Cauchy* si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq N$, alors $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$. Remarque : en particulier, toute suite convergente est de Cauchy.

Un espace vectoriel normé est dit *complet* si toute suite de Cauchy est convergente.

Définition 3.7. Un espace vectoriel muni d'un produit hermitien est un *espace de Hilbert* si et seulement si il est complet (pour la norme induite par le produit hermitien).

Proposition 3.8. Un sous-espace F d'un espace de Hilbert H est fermé si et seulement si il est lui-même de Hilbert.

Proof. Soit F fermé. Soit $(v_n)_n \subset F$ une suite de Cauchy. Alors elle admet une limite $v \in H$. Mais comme F est fermé, il contient la limite de toute suite convergente contenue dans F, donc $v \in F$.

Réciproquement, soit $(v_n)_n \subset F$ une suite qui converge vers $v \in H$. Alors $(v_n)_n$ est de Cauchy, donc convergente dans F puisque F est de Hilbert, donc par unicité de la limite on a $v \in F$. □

Reprenons la situation du Théorème 3.5. L'identité du parallélogramme permet de montrer que si (y_n) est une suite telle que $\lim_n \|x_0 - y_n\| = \inf_{y \in V} \|x_0 - y\|$, alors la suite (y_n) est de Cauchy. Donc elle sera convergente. La projection sur un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert est donc toujours définie et unique.

Nous citerons deux exemples importants d'espaces de Hilbert.

Exemple 1 : $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Soit $\ell^2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites à valeurs complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 < +\infty$. C'est celui qui intervient naturellement quand on considère les séries de Fourier. C'est un espace vectoriel (le seul point délicat de la démonstration est que si $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z})$, alors $u+v \in \ell^2(\mathbb{Z})$; cela vient du fait que $|u_n+v_n|^2 \leq |u_n|^2+2|u_n||v_n|+|v_n|^2 \leq 2|u_n|^2 + 2|v_n|^2$).

On peut munir cet espace du produit hermitien

$$\langle u, v\rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \bar{v}_n.$$

A nouveau, cette somme converge car $|u_n\bar{v}_n| \leq |u_n|^2 + |v_n|^2$, et les autres propriétés d'un produit hermitien sont facilement vérifiées.

Proposition 3.9. L'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ muni du produit hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Considérons une suite de Cauchy $(c^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{Z})$, chaque terme de cette suite s'écrivant en détail $(c_n^{(k)})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Cela implique que la suite est bornée, i.e. $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|c^{(k)}\| =: S < +\infty$; et que pour chaque n fixé, $(c_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc $\lim_{k\in\mathbb{N}} c_n^{(k)}$ existe dans $\mathbb{C}$. On note c_n cette limite.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} |c_n^{(k)}|^2 \leq S^2 < +\infty,$$

donc $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Il reste à montrer que $\|c^{(k)} - c\| \to 0$ quand $k \to +\infty$.

Posons, pour raccourcir la notation, $a^{(k)} = c^{(k)} - c$. Il reste à montrer que $\|a^{(k)}\| \to 0$ quand $k \to +\infty$.

Supposons pour obtenir une contradiction que $\|a^{(k)}\|$ ne tende pas vers 0. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on puisse trouver des entiers k arbitrairement grands avec $\|a^{(k)}\| > \varepsilon$.

D'après l'hypothèse qu'on a une suite de Cauchy, il existe $K = K(\varepsilon)$ tel que pour tous $l, m \geq K$, $\|a^{(l)} - a^{(m)}\| \leq \varepsilon/2$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n^{(l)} - a_n^{(m)}|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

D'après ce qu'on a dit juste avant, il existe $k_1 \geq K$ tel que $\|a^{(k_1)}\| > \varepsilon$. Ceci signifie, en utilisant la définition de la somme d'une série, qu'il existe N_1 tel que

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1} |a_n^{(k_1)}|^2 > \varepsilon^2.$$

Mais alors, pour tout $m \geq k_1 \geq K$,

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1} |a_n^{(k_1)} - a_n^{(m)}|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n^{(k_1)} - a_n^{(m)}|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4},$$

mais d'autre part comme on a une somme finie et que $\lim_{m\to\infty} a_n^{(m)} = 0$ pour tout n fixé,

$$\frac{\varepsilon^2}{4} \geq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=-N_1}^{N_1} |a_n^{(k_1)} - a_n^{(m)}|^2 = \sum_{n=-N_1}^{N_1} |a_n^{(k_1)}|^2 > \varepsilon^2,$$

contradiction. □

Exemple 2 : L^2**.**

On peut définir une notion plus compliquée d'intégrale (due à Henri Lebesgue), qui permet d'étendre l'intégrale de Riemann et les intégrales généralisées dans le cas de la convergence absolue. Ce sujet sera étudié en L3.

On notera $\int_{\mathbb{R}} f$ cette intégrale qui en particulier est égale à l'intégrale habituelle quand $\int_{\mathbb{R}} |f|$ converge. Quand $f \geq 0$ et que l'intégrale diverge, on écrit $\int_{\mathbb{R}} f = +\infty$. Cette construction est valide sur une classe de fonctions très vaste, qui contient en particulier toutes les fonctions continues par morceaux, et toutes les limites simples de suites de telles fonctions.

On va assimiler deux fonctions f, g de cette classe quand $\int_{\mathbb{R}} |f-g| = 0$, ce qui (admis !) est équivalent à $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{f\neq g\}} = 0$, et donc à $\int_{\mathbb{R}} |f-g|^2 = 0$. Techniquement, c'est une relation d'équivalence, et on a remplacé les fonctions par leur classe d'équivalence par rapport à cette relation. Remarquons que si f, g sont continues, alors $\int_{\mathbb{R}} |f-g| = 0$

si et seulement si $f = g$; par contre, si on prend une fonction donnée et qu'on change sa valeur en un nombre fini de points, alors on ne change pas son intégrale (en fait, on pourrait changer la valeur sur des ensembles beaucoup plus grands, comme des ensembles infinis dénombrables, sans changer la valeur de l'intégrale au sens de Lebesgue).

Étant donné un intervalle $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, on dira que f est *à support compact* dans $]a, b[$ si il existe $c < d \in]a, b[$ tels que $f(x) = 0$ si $a < x < c$ ou $d < x < b$. On notera $\mathcal{C}_C(]a, b[)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $]a, b[$.

Nous admettons les faits suivants :

Pour tout intervalle $]a, b[\subset \mathbb{R}$, l'espace $L^2(a, b)$, espace des fonctions f telles que $\int_a^b |f|^2$ a un sens et est finie, est un espace complet pour la norme donnée par $\|f\|^2 := \int_a^b |f|^2$, qui provient du produit hermitien $\langle f, g\rangle := \int_a^b f\bar{g}$, lui-même bien défini car en tout point $|f(x)\bar{g}(x)| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$. C'est donc un espace de Hilbert.

L'espace $\mathcal{C}_C(]a, b[)$ est dense dans $L^2(a, b)$ au sens de la norme définie ci-dessus, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe une suite (g_n) d'éléments de $\mathcal{C}_C(]a, b[)$ telle que $\lim_n \|f - g_n\| = 0$.

Théorème 3.10. *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.*

La démonstration utilise, en particulier, la convolution par des identités approchées, et fait l'objet de l'exercice 1.5 de la feuille de TD 4.

Théorème 3.11. *La transformation de Fourier s'étend à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ comme l'unique prolongement continu de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En particulier, on aura encore $\|\hat{f}\| = \|f\|$.*

C'est un cas particulier d'un théorème (facile) de topologie sur le prolongement des applications uniformément continues dans un espace complet.

Proposition 3.12. Soient X et Y des espaces de Hilbert et $A \subset X$ une partie dense.

Soit f une application de A dans Y, qui vérifie : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $x, x' \in X$, $\|f(x) - f(x')\| \leq C\|x - x'\|$.

Alors il existe un unique prolongement $\tilde{f}$ de f à X, c'est-à-dire une application de X dans Y qui vérifie $\tilde{f}(a) = f(a)$ pour tout $a \in A$.

De plus, on a $\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')\| \leq C\|x - x'\|$.

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité. Supposons que $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ soient deux prolongements. Pour tout $x \in X$, il existe une suite $(a_n)_n \subset A$ telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = x$, donc $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}(a_n) = \tilde{g}(x)$.

Pour construire un prolongement, pour $x \in X$, on prend une suite $(a_n)_n \subset A$ telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Alors (a_n) est une suite de Cauchy. Donc $(f(a_n))_n$ est une suite de Cauchy, puisque étant donné $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour $n, m \geq N$, $\|a_n - a_m\| \leq \varepsilon/C$, donc $\|f(a_n) - f(a_m)\| \leq C \cdot \varepsilon/C = \varepsilon$. La suite $(f(a_n))_n$ est convergente puisque Y est complet.

On pose $\tilde{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(a_n)$. Si $x \in A$, $\|f(x) - f(a_n)\| \leq C\|x - a_n\| \to 0$, donc $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \tilde{f}(x)$, on a donc un prolongement. A cause de l'unicité démontrée ci-dessus, si on le construisait en prenant d'autre choix de suites $(a_n)_n$, on trouverait le même résultat.

Montrons l'inégalité annoncée. Soient $(a_n)_n, (a'_n)_n$ les suites utilisées pour définir $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{f}(x')$ respectivement. Alors $f(a_n) - f(a'_n) = f(a_n) - \tilde{f}(x) + \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x') + \tilde{f}(x') - f(a'_n)$, donc l'inégalité triangulaire implique

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')\| - \|f(a_n) - \tilde{f}(x)\| - \|\tilde{f}(x') - f(a'_n)\| &\leq \|f(a_n) - f(a'_n)\| \\ &\leq \|f(x) - \tilde{f}(x')\| + \|f(a_n) - \tilde{f}(x)\| + \|\tilde{f}(x') - f(a'_n)\|,\end{aligned}$$

ce qui montre par le théorème d'encadrement que $\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')\| = \lim_{n\to\infty} \|f(a_n) - f(a'_n)\|$, et en particulier que la limite existe et est $\leq C \lim_{n\to\infty} \|a_n - a'_n\| = C\|x - x'\|$. $\square$

Ainsi l'espace $L^2(\mathbb{R})$ fournit un domaine naturel d'extension de la transformée de Fourier, sur lequel elle est une bijection isométrique, et qui contient l'ensemble de toutes les fonctions continues par morceaux, bornées et absolument intégrables (que nous avions considéré jusqu'à présent), et en particulier la classe de Schwartz.

Le théorème d'inversion se prolonge aussi. Notons temporairement $\hat{f}$ la transformée de Fourier au sens habituel et $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier prolongée à $L^2(\mathbb{R})$.

Proposition 3.13. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^2(f) := \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = \check{f}$, où $\check{f}(x) := f(-x)$.

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui tend vers f (par exemple, on peut prendre $(f_n)_n \subset \mathcal{C}_C(\mathbb{R})$). Par construction, $\mathcal{F}^2(f) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^2(f_n)$ et par changement de variable $x' = -x$ (qui est toujours valide dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue), $\check{f} = \lim_{n\to\infty} \check{f}_n$. Alors, en utilisant le fait que la norme est toujours une application continue (conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire),

$$\|\mathcal{F}^2(f) - \check{f}\| = \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}^2(f_n) - \check{f}_n\| = 0.$$

$\square$

Donnons un cas particulier de (classes de) fonctions non nécessairement intégrables pour lesquelles nous pouvons désormais définir une transformée de Fourier.

Proposition 3.14. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $C > 0$ avec $|f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $f_N(x) := f(x)\chi_{[-N,N]}(x)$ (qui est absolument intégrable). Alors, si on appelle encore $\mathcal{F}$ le prolongement de la transformée de Fourier donné par le théorème ci-dessus, $\mathcal{F}(f) = \lim_{N\to+\infty} \hat{f}_N$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $(f_n)_n$ est une suite qui tend vers f au sens de $L^2(\mathbb{R})$. Or en tout point $\lim_{n\to\infty}(f(x) - f_n(x))^2 = 0$ (puisque c'est égal à 0 dès que $n \geq |x|$). D'autre part, pour tout x et tout n, $|f_n(x) - f(x)|^2 \leq |f(x)|^2 \leq C^2(1+|x|)^{-2}$, qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le Théorème de la Convergence Dominée vu en S3, $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f_n(x))^2 dx = 0$, cqfd. $\square$

Si jamais on suppose en plus que f est bornée et absolument intégrable, il est facile de montrer par le théorème de la convergence dominée que $\lim_{N\to+\infty} \hat{f}_N(\xi)$ existe en tout point, et vaut $\hat{f}(\xi)$ (la transformée de Fourier au sens habituel), et les théorèmes que nous connaissons déjà (le fait que la transformée de Fourier conserve la norme de $L^2(\mathbb{R})$) permettent de montrer que $\mathcal{F}(f) = \lim_{N\to+\infty} \hat{f}_N$ au sens de l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

Mais attention ! la limite au sens de l'espace $L^2(\mathbb{R})$, dans le cas général, ne veut pas forcément dire qu'on a pour tout ξ, $F(f)(\xi) = \lim_{N\to+\infty} \hat{f}_N(\xi)$.

Prenons par exemple la fonction $S(\xi) := \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}$. Nous savons qu'elle est la tranformée de Fourier de la fonction porte, $f_0(x) := \chi_{[-1/2,+1/2]}(x)$. Ces fonctions étant paires, on conjecture bien entendu (à cause de la formule d'inversion) que la transformée de Fourier $\hat{S}$ est égale à f_0. On peut démontrer par des méthodes d'analyse complexe (formule des résidus) que c'est vrai en tout $\xi \notin \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$. En ces deux points, les formules divergent, ce qui n'est pas très surprenant puisqu'ils correspondent à des discontinuités de f_0. Mais comme deux points, c'est négligeable au sens de $L^2(\mathbb{R})$, on vérifie que dans cet exemple particulier la formule d'inversion de Fourier est valide.

3.3. **Bases hilbertiennes.**

Soit E un espace muni d'un produit hermitien.

Définition 3.15.
- Un *système orthonormé* est une famille de vecteurs de E, $(x_j, j \in \mathcal{J})$, telle que $\langle x_j, x_k\rangle = 1$ si $j = k$ et $= 0$ si $j \neq k$. On note en général $\langle x_j, x_k\rangle = \delta_{j,k}$.
- Le sous-espace vectoriel engendré par $(x_j, j \in \mathcal{J})$ est l'ensemble des combinaisons linéraires finies des x_j, c'est-à-dire
$$\mathrm{Vect}(x_j, j \in \mathcal{J}) := \left\{ x \in E : \exists \mathcal{J}_0 \text{ fini } \subset \mathcal{J}, \lambda_j \in \mathbb{C}, \text{ t.q. } x = \sum_{j\in\mathcal{J}_0} \lambda_j x_j \right\}.$$
- La famille $(x_j, j \in \mathcal{J})$ est génératrice si $\mathrm{Vect}(x_j, j \in \mathcal{J}) = E$.
- La famille $(x_j, j \in \mathcal{J})$ est un *système complet* si $\overline{\mathrm{Vect}}\,(x_j, j \in \mathcal{J})$ est dense dans E.
- La famille $(x_j, j \in \mathcal{J})$ est une *base hilbertienne* si c'est un système orthonormé et complet.

Remarque. Il est facile de montrer, comme dans le cas des espaces de dimension finie, qu'un système orthonormé est libre. Un système orthonormé générateur s'appelle une base orthonormée.

En dimension infinie, un système complet est beaucoup plus petit qu'un système générateur. En fait, on peut montrer (avec des méthodes qui dépassent largement le niveau de notre cours) qu'un espace de Hilbert qui admet une base hilbertienne dénombrable infinie ne peut pas admettre de base orthonormée. La bonne notion est donc celle de base hilbertienne, mais il faut bien comprendre qu'en général, ce n'est pas une base au sens habituel ! cf. Feuille 4, exercice 2.1.

Exemple 3.16. Le système $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$, où $e^{(k)}_n = \delta_{k,n}$, est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{Z})$. C'est l'analogue dénombrable de la base canonique dans $\mathbb{C}^n$ muni du produit hermitien usuel.

Démonstration. Le fait qu'on a un système orthonormé se vérifie facilement. Pour voir que c'est un système complet, il suffit de voir que toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est limite des suites tronquées u^N définies pour $N \in \mathbb{N}$ par $u^N_n = u_n$ si $|n| \leq N$, $u^N_n = 0$ si $|n| > N$. Or $\|u - u^N\|^2 = \sum_{|n|>N} |u_n|^2 \to 0$ quand $N \to +\infty$ puisqu'on a une série convergente. $\square$

Proposition 3.17. Si $(v_1, \dots, v_d)$ est un système orthonormé fini de E et $V := \mathrm{Vect}\,(v_1, \dots, v_d)$, alors pour tout $f \in E$ la projection orthogonale de f sur V existe et est donnée par

$$\pi_V(f) = \sum_{j=1}^{d} \langle f, v_j \rangle v_j.$$

Démonstration. Notons provisoirement $P(f)$ le membre de droite de l'égalité ci-dessus. Alors pour $1 \leq k \leq d$,

$$\langle f - P(f), v_k \rangle = \langle f, v_k \rangle - \sum_{j=1}^{d} \langle f, v_j \rangle \langle v_j, v_k \rangle = \langle f, v_k \rangle - \langle f, v_k \rangle = 0,$$

puisque le seul terme non nul dans la somme apparaît pour $j = k$.

Maintenant si on prend un vecteur quelconque $h \in V$, $h = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k v_k$ et $\langle f - P(f), h \rangle = \sum_{k=1}^{d} \bar{\lambda}_k \langle f - P(f), v_k \rangle = 0$. On a donc vérifié le critère du Théorème de projection. □

On remarquera que de façon analogue au cas de la dimension finie, les produits $\langle f, v_k \rangle$ donnent des "coordonnées" de f par rapport au système orthonormé.

Corollaire 3.18. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

En effet, tout espace vectoriel de dimension finie admet une base orthonormée et on peut donc lui appliquer la proposition. Si il existe une suite $(f_n) \subset V$ telle que $f_n \to f$, alors $\inf_{h \in V} \|f - h\| \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|f - f_n\| = 0$, donc $f = \pi_V(f) \in V$.

Une autre conséquence importante se trouve en appliquant le Théorème de Pythagore aux vecteurs orthogonaux $f - \pi_V(f)$ et $\pi_V(f)$: $\|f\|^2 = \|f - \pi_V(f)\|^2 + \|\pi_V(f)\|^2 \geq \|\pi_V(f)\|^2$, or par un calcul classique $\|\pi_V(f)\|^2 = \sum_{j=1}^{d} |\langle f, v_j \rangle|^2$.

Théorème 3.19. *(Inégalité de Bessel)*
Soit $(e_j, j \in \mathbb{N}^*)$ un système orthonormé dans E. Alors pour tout $f \in E$,
$\|f\|^2 \geq \sum_{j=1}^{+\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2$.

La conclusion contient en particulier le fait que la série du membre de droite est convergente.

Démonstration. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, le système $(e_j, 1 \leq j \leq N)$ est orthonormé, on peut donc appliquer la proposition et le calcul ci-dessus, donc toute somme partielle de la série à termes positifs admet la borne $\|f\|^2$, ce qui implique la convergence et l'inégalité qu'on a affirmée. □

Théorème 3.20. *(Identité de Parseval)*
Soit $(e_j, j \in \mathbb{N}^*)$ une base hilbertienne E. Alors pour tout $f \in E$,
$\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2$.

Dans ce cas, l'application $f \mapsto (\langle f, e_j \rangle)_{j \in \mathbb{N}^*}$ donne une isométrie entre l'espace E et $\ell^2(\mathbb{N}^*)$. Donc l'exemple 3.16 décrit à isométrie près la situation dans tous ces cas (qui sont très répandus, on parle alors d'espace de Hilbert *séparable*). En ce sens il n'y a qu'un seul espace de Hilbert séparable, que les physiciens appellent parfois "l'espace de Hilbert".

Démonstration. Soit $V_n := \mathrm{Vect}\,(e_j, 1 \leq j \leq n)$. Comme le système $(e_j, j \in \mathbb{N}^*)$ est complet, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n et $f_n \in V_n$ tels que $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$, et donc $\|f - \pi_{V_n}(f)\| \leq \varepsilon$, donc d'après le Théorème de Pythagore $\|f\|^2 - \varepsilon^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |\langle f, e_j \rangle|^2$. Ceci implique $\sum_{j=1}^{+\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2 = \|f\|^2$. □

Exemple 3.21. Soit e_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e_n(x) := e^{inx}$. On peut en particulier la considérer comme une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$, périodique de période 2π, et donc aussi comme un élément de $L^2(-\pi, \pi)$. On munit cet espace du produit hermitien $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g}$.

Alors $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ est une base hilbertienne.

Il est facile de voir que c'est un système orthonormé (reprendre votre cours sur les séries de Fourier), et plus délicat que c'est un système complet (cf. Feuille de TD 4). On pose $c_n(f) := \langle f, e_n \rangle$. Si on prend $V_n := \mathrm{Vect}\,(e_j, -n \leq j \leq n)$, alors $\pi_{V_n}(f)(x) = \sum_{j=-n}^{n} c_j(f) e^{ijx} =: S_n(f)(x)$, la n-ième somme de Fourier.

Dans ce cadre l'Identité de Parseval devient : $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |c_j|^2$.

4. Applications

4.1. **Formule sommatoire de Poisson.** Supposons qu'on ait une fonction f telle qu'il existe $C, \delta > 0$ tels que $|f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-1-\delta}$ et $|\hat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-1-\delta}$. C'est vrai en particulier si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, mais dans bien d'autres cas.

Alors la série $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x + n)$ converge uniformément sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$ (exercice). On note sa somme $\tilde{f}(x)$. Clairement, $\tilde{f}(x + 1) = \tilde{f}(x)$. On peut donc définir des coefficients de Fourier de $\tilde{f}$ par rapport à la base hilbertienne $(e^{2\pi inx}, n \in \mathbb{Z})$ (notez que nous avons changé de normalisation par rapport à l'exemple 3.21).

Théorème 4.1. *(Formule sommatoire de Poisson)*

Sous les hypothèses ci-dessus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi inx}.$$

Si on définit les coefficients de Fourier d'une fonction périodique de période 1 *par $c_n(g) := \int_0^1 g(x) e^{-2\pi inx} dx$, alors la formule dit que $c_n(\tilde{f}) = \hat{f}(n)$, et que $\tilde{f}$ est la somme de sa série de Fourier.*

Démonstration. La série dans le côté droit de l'égalité converge normalement grâce a l'hypothèse de décroissance de $\hat{f}$. On a donc deux fonctions continues et périodiques de période 1 ; pour démontrer qu'elles sont identiques, il suffit de montrer que leurs coefficients de Fourier sont égaux, c'est-à-dire que $\hat{f}(n) = \int_0^1 \tilde{f}(x) e^{-2\pi inx} dx$. Or par convergence uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} c_n(\tilde{f}) = \int_0^1 e^{-2\pi inx} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x + j) dx &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 e^{-2\pi inx} f(x + j) dx \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 e^{-2\pi in(x+j)} f(x + j) dx. \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $x' := x + j$:

$$c_n(\tilde{f}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_j^{j+1} e^{-2\pi i n x'} f(x')dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i n x'} f(x')dx = \hat{f}(n).$$

$\square$

Cette formule se généralise au cas d'une fonction f de période $T > 0$. Il suffit de poser $g(y) := f(Ty)$, alors g est de période 1. On sait que $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{T}\hat{f}(\frac{\xi}{T})$, et on calcule $g(\frac{x}{T} + n) = f(x + nT)$. Le théorème se traduit donc en :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\frac{n}{T}) e^{2\pi i \frac{n}{T} x}. \tag{3}$$

On peut en tirer des conséquences dans deux directions. Si f est une fonction à support compact, on peut choisir T assez grand pour que f soit nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Alors le membre de gauche dans (3) n'a qu'un terme non nul, et on obtient

$$f(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\frac{n}{T}) e^{2\pi i \frac{n}{T} x}.$$

On peut ainsi reconstruire f à partir de sa transformée de Fourier d'une façon plus facile qu'avec une intégrale.

Vue la symétrie des hypothèses entre f et $\hat{f}$, en utilisant la formule d'inversion de Fourier, on voit que si $\hat{f}$ est à support compact contenu dans $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, on obtient

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\frac{n}{T}) e^{-2\pi i \frac{n}{T} x}.$$

Remarque : on n'arrivera jamais à une formule exacte avec une somme finie, car le seul cas où f et $\hat{f}$ ont simultanément un support compact est quand $f \equiv 0$. Donnons une idée de la raison : si f est à support contenu dans $[-A, +A]$ et bornée, alors, en posant $t = x + A$,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-A}^{A} e^{-2\pi i \xi x} f(x)dx = e^{2\pi i A \xi} \int_0^{2A} e^{-2\pi i \xi t} f(x)dx.$$

On peut considérer $\xi \in \mathbb{C}$, et dès que $\operatorname{Im} \xi \geq 0$, $|e^{-2\pi i \xi t} f(x)| \leq |f(x)|$, donc l'intégrale est convergente et sa valeur est une fonction holomorphe bornée de ξ dans le demi-plan supérieur. Mais puisque $\hat{f}$ est nulle en dehors d'un intervalle borné, elle s'annule sur tout un intervalle de la droite réelle, qui est le bord de son domaine d'existence. On peut montrer (par des méthodes de la théorie des fonctions holomorphes qui dépassent le niveau du cours de deuxième année) que dans ce cas la fonction holomorphe doit être identiquement nulle, donc $\hat{f}$, et donc f aussi. Ce raisonnement peut s'étendre au cas où $f \in L^2(-A, A)$ (plutôt que d'être bornée).

4.2. **Principe d'incertitude de Heisenberg.** (résumé)

Théorème 4.2. *Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$. Alors*

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Avec des changements de variables faciles, on voit que pour tout $x_1, \xi_1 \in \mathbb{R}$,

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_1)^2 |\psi(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi-\xi_1)^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Quand $x_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi(x)|^2 dx$, $\xi_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} \xi|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$, cela s'interprète comme le produit des variances de la position et de l'impulsion (en mécanique quantique).

4.3. **Equation de la chaleur.** On se place dans un fil sans épaisseur qui transmet la chaleur, qu'on assimile à la droite réelle. En prenant des unités appropriées, si $u(t,x)$ représente la température au point x et au temps t, la fonction u satisfait l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4}$$

On suppose aussi que la distribution de température initiale est donnée par $u(0,x) = f(x)$, une fonction connue. On veut savoir quelle sera l'évolution de la température en chaque point, pour tous les temps $t > 0$.

Voyons d'abord ce qui se passe sous des hypothèses favorables. Nous allons supposer pour l'instant que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et que pour tout t fixé, $u(t,\cdot)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, uniformément en t, c'est-à-dire que les constantes qui interviennent dans les majorations des dérivées ne dépendent pas de t.

On va prendre la transformée de Fourier de l'équation (4) par rapport à x. On note

$$\hat{u}(t,\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} u(t,x) dx.$$

Alors la Proposition 1.2 implique que

$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}(t,\xi) = -4\pi^2\xi^2 \hat{u}(t,\xi).$$

D'autre part, comme $\left|e^{-2\pi i x\xi}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\right| \leq C(1+|x|)^{-2}$ avec une constante indépendante de t (conséquence des hypothèses sur les dérivées), on peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale, et

$$\left(\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)}\right)(t,\xi) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi).$$

Finalement, pour chaque ξ fixé, (4) implique que la fonction $U(t) := \hat{u}(t,\xi)$ vérifie l'équation $U'(t) = -4\pi^2\xi^2 U(t)$, et donc $U(t) = U(0)e^{-4\pi^2\xi^2 t}$, autrement dit

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}(0,\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t} = \hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}.$$

Pour calculer $u(t,x)$, il reste à appliquer la transformée de Fourier inverse, le produit se transforme en convolution et on trouve $u(t,x) = f * H_t(x)$, où, en appliquant le fait que la gaussienne $G(x) := e^{-\pi x^2}$ est invariante par transformée de Fourier et la

Proposition 1.2, on trouve l'expression du Noyau de la Chaleur (comme la notation H l'indique)

$$H_t(x) = \left(e^{-\pi(2\sqrt{\pi t}\xi)^2}\right)\widehat{}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\pi(\frac{x}{2\sqrt{\pi t}})^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Après ces considérations heuristiques, nous aimerions avoir un théorème un peu plus général.

Théorème 4.3. *Soit f une fonction continue, bornée et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $u(t,x) = f * H_t(x)$. Alors*

(1) $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ *et* $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ *pour* $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$*;*
(2) $\lim_{t\to 0, t>0} u(t,x) = f(x)$, *uniformément pour* $x \in [a,b]$, *si* $[a,b]$ *est un intervalle sur lequel* f *est continue;*
(3) $\lim_{t\to 0, t>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x) - f(x)|^2\, dx = 0.$

Démonstration. Nous ne démontrerons pas (1) en toute généralité, nous nous bornerons aux dérivées dont nous avons besoin pour l'équation. Nous nous plaçons dans le domaine $t \in]\delta, A[$, $x \in]-A, A[$ avec $0 < \delta < A < +\infty$. En changeant les valeurs de δ et de A ceci nous permet de traiter tous les points de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

La fonction H_t est continue, bornée et intégrable, donc le Corollaire 2.17 montre que $\hat{u}(t,x) = \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2\xi^2 t}$, qui est une fonction intégrable. D'après les propriétés du produit de convolution, u est continue et absolument intégrable en x. Donc

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2\xi^2 t} e^{2\pi i x\xi} d\xi.$$

On peut calculer les dérivées de u par rapport t en dérivant sous l'intégrale car

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2\xi^2 t} e^{2\pi i x\xi}\right)\right| = \left|\hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi}(-4\pi^2\xi^2) e^{-4\pi^2\xi^2 t}\right| \le 4\pi^2\xi^2 e^{-4\pi^2\xi^2\delta} |\hat{f}(\xi)|,$$

et comme $|\hat{f}(\xi)|$ est bornée, c'est une fonction absolument intégrable de ξ qui ne dépend pas de t. On trouve donc

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2\xi^2 t} e^{2\pi i x\xi} d\xi.$$

Les dérivées de u par rapport à x se calculent en utilisant la Proposition 1.2, car $\xi^2 \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2\xi^2 t}$ est absolument intégrable (toujours grâce à la décroissance de l'exponentielle et au fait que $\hat{f}$ est bornée). Donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi i\xi)^2 \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2\xi^2 t} e^{2\pi i x\xi} d\xi,$$

et on a le résultat voulu.

Pour démontrer (2), il suffit de voir que $(H_t)_{t>0}$ est une unité approchée. Or nous l'avons vu dans la section 2.2 pour $K_\delta(x) := \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi\frac{x^2}{\delta}}$, et il suffit de poser $\delta = 4\pi t$.

Pour démontrer (3), grâce à l'identité de Plancherel, il suffit d'étudier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{u}(t,\xi) - \hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \left|e^{-4\pi^2\xi^2 t} - 1\right|^2 d\xi.$$

Or f étant bornée et absolument intégrable, on voit facilement que $|f|^2$ est intégrable, donc $|\hat{f}|^2$ est aussi intégrable d'après l'extension à L^2 que nous avons faite de la transformée de Fourier, et donc comme $|\hat{f}(\xi)|^2 \left|e^{-4\pi^2\xi^2 t} - 1\right|^2 \leq 4|\hat{f}(\xi)|^2$ et que $\left|e^{-4\pi^2\xi^2 t} - 1\right|^2 \to 0$ quand $t \to 0$, on peut appliquer le théorème de Convergence Dominée.

On peut aussi se ramener au cas où $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ en approximant f et en utilisant le fait que $\|f * H_t\| \leq \|f\| \int H_t = \|f\|$, cf. Feuille de TD 3, exercice 2.1 (3). Ceci permet d'éviter d'invoquer l'espace L^2. □

On a une solution, mais on aimerait savoir qu'il n'y en a pas d'autres. On va le montrer, sous des hypothèses assez fortes.

Théorème 4.4. *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, bornée, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Soient u_1 et u_2 deux solutions de* (4) *telles que pour $i = 1, 2$, $u_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, $u_i(0, x) = f(x)$, et pour tout $T > 0$, $k, \ell \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{0<t<T, x\in\mathbb{R}} \left| x^k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell u_i(t, x)\right| < +\infty$$

(autrement dit $u(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, uniformément en $t \in]0, T[$). Alors $u_1 = u_2$.

Démonstration. Si on considère $u := u_1 - u_2$, on a une nouvelle solution de (4) avec des valeurs au bord identiquement nulles, qui vérifie toutes les autres hypothèses. Il reste à montrer que $u \equiv 0$. Si on pose $E(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x)|^2 dx$, on a clairement $E(0) = 0$, $E(t) \geq 0$, donc si on arrive à montrer que c'est une fonction décroissante de t, on aura qu'elle est nulle, et donc u aussi.

Or, grâce aux hypothèses sur u (qu'on pourrait affaiblir), en utilisant $|u|^2 = u\bar{u}$,

$$E'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\bar{u}(x, t) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(t, x)u(x, t)\right) dx,$$

ce qui donne en appliquant (4), puis en intégrant par parties,

$$E'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)\bar{u}(x, t) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(t, x)u(x, t)\right) dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(t, x) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(t, x)\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\right) dx = -2\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\right|^2 dx \leq 0.$$

□

Remarquons que ce calcul peut être fait avec n'importe quelle distribution initiale de températures f, et donne dans ce cas que $E(t)$, étant décroissante, admet une limite quand $t \to +\infty$. Si E' admet aussi une limite, elle devra être nulle, et donc on devrait avoir $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \to 0$, ce qui correspond à l'intuition physique d'une distribution uniforme de température à l'équilibre. On peut le vérifier en utilisant les propriétés du noyau de la chaleur.

4.4. **Fonctions harmoniques.** (résumé)

Définition 4.5. Une fonction $u(x, y)$ est dite *harmonique* si elle satisfait l'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Théorème 4.6. *Si une fonction est harmonique et bornée sur le demi-plan supérieur ouvert* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, *continue sur le demi-plan supérieur fermé* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, *et que ses valeurs sur la droite réelle sont données par* $u(x, 0) = u_0(x)$, *alors* $u(x, y) = u_0 * P_y(x)$, *où la convolution est prise par rapport à la variable* x *et* P_y *est le noyau de Poisson :*

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Pour finir, on montre que les fonctions harmoniques vérifiaient le principe du maximum (tout comme les modules de fonctions holomorphes).