UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL NOTES DE COURS POUR "ANALYSE HILBERTIENNE"

PASCAL J. THOMAS

Avertissement. Ces notes donnent un résumé de cours concernant la Transformée de Fourier et un certain nombre de sujets liés. Toutes les démonstrations ne sont pas nécessairement données. Certains théorèmes importants sont admis.

0. Pré-requis

0.1. **Dérivées et intégrales de fonctions à valeurs complexes.** On rappelle que pour un nombre complexe $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $\bar{z} := x - iy$, $|z|^2 := z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors on écrit $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, où $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{R}$, et on définit (quand f_1 et f_2 sont intégrables, resp. dérivables)

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b f_1(x)dx + i\int_a^b f_2(x)dx, \quad f'(x) := f_1'(x) + if_2'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Les formules habituelles (dérivations d'une somme, d'un produit, de $1/f$, théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, intégrale d'une somme, intégration par parties, changement de variable...) sont valables dans ce cadre.

Nous avons un problème pour la dérivée d'une fonction composée $g \circ f$: il faut désormais que g soit une fonction à variable complexe, et que signifie sa dérivée dans ce cas ? Nous renvoyons au cours de fonctions holomorphes pour une étude de cette question.

Toutefois, les formules sur les produits nous permettent de voir que $\frac{d}{dx}(f(x))^n = nf'(x)(f(x))^{n-1}$, comme d'habitude. Un autre cas particulier très important est celui de $e^{f(x)}$.

0.2. **Exponentielle complexe.** On définit la fonction e^z comme l'unique fonction telle que $e^0 = 1$, $e^{z+w} = e^z e^w$, et $\lim_{z\to 0}(e^z - 1)/z = 1$. Nous admettrons l'unicité. L'existence découle de

Théorème 0.1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Des propriétés définissantes de l'exponentielle, on déduit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^z(e^h - 1)}{h} = e^z,$$

donc l'exponentielle est dérivable au sens complexe et on peut montrer facilement que $(e^f)' = f'e^f$.

On remarque que $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, et donc $|e^{iy}|^2 = e^{iy}e^{-iy} = 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions trigonométriques par

$$\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$

et on voit que quand $z \in \mathbb{R}$ on a bien les propriétés des fonctions trigonométriques usuelles.

0.3. **Intégrales impropres.** Ce sujet a été traité dans le cours d'analyse de Fourier du S3.

Soit $a \in \mathbb{R}$, et f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. On pose, si la limite existe dans $\mathbb{R}$,

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt := \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(t)dt.$$

On dira que f est *intégrable* sur $[a, +\infty[$ si la limite existe (et donc est finie). On dira (parfois) que f est *absolument intégrable* si $|f|$ est intégrable. L'intégrabilité absolue implique l'intégrabilité, et la réciproque est fausse.

On pose des définitions analogues pour $\int_{-\infty}^a f(t)dt$.

On dira que f est intégrable sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ si f est à la fois intégrable sur $[a, +\infty[$ et sur $]-\infty, a]$ (on prend souvent $a = 0$, parfois on découpe en plusieurs intervalles : les intervalles bornés ne posent pas de problème).

Attention, le fait que f soit intégrable sur $\mathbb{R}$ implique que $\lim_{A\to+\infty} \int_a -A^A f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$, mais la réciproque est fausse en général. Les deux propriétés ne sont équivalentes que pour l'absolue intégrabilité (exercice).

Exemples : $f_1(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Attention ! Si f tend vers une limite à l'infini et est intégrable, cette limite doit être 0. Mais il existe des fonctions intégrables qui n'ont pas de limite à l'infini.

Propriétés : on obtient en passant à la limite les propriétés habituelles de changement de variables et d'intégration par parties. Attention aux bornes ! Il vaut mieux refaire le processus de limite si on n'est pas sûr du résultat.

Nous allons souvent utiliser le résultat suivant, qui a été vu par les étudiants de l'option mathématiques et que les physiciens devront admettre :

Théorème 0.2. *(Dérivation sous l'intégrale)*

Soit $(x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction sur $I \times J$ (I, J intervalles), continue par morceaux en x et intégrable sur I pour t fixé ; continument dérivable en t pour x fixé.

On suppose qu'il existe une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$, intégrable sur I, telle que pour tout $t \in J$, $x \in I$, $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\right| \leq g(x)$. Alors

$$\frac{d}{dt} \int_I f(x, t)dt = \int_I \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)dx.$$

Remarque : si I et J sont fermés et bornés et $\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)$ continue, elle est bornée par une constante et le théorème s'applique facilement. Mais nous aurons besoin de l'appliquer sur des intervalles I non-bornés, notamment la droite réelle.

1. Transformée de Fourier, définition et premières propriétés

1.1. **Motivation.** Nous allons vouloir étudier l'analogue des coefficients de Fourier pour un signal non-périodique, a priori défini sur toute la droite réelle. Toutefois, on va le supposer d'énergie finie, et même dans un premier temps représenté par une fonction f absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

Une première idée peut être d'approximer cette fonction f par sa restriction à un intervalle $[-T/2, T/2]$ avec T très grand, et à traiter ceci comme une fonction périodique de période T. Ses coefficients de Fourier seront donnés par

$$c_{n,T}(f) := \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i n \frac{t}{T}} \frac{1}{T} dt.$$

Si f est assez régulière, ces coefficients décroissent rapidement et on peut écrire la fonction comme somme de sa série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n,T}(f) e^{2\pi i n \frac{t}{T}},$$

et si on pose

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt,$$

la formule d'avant se réécrit

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T} \hat{f}(\frac{n}{T}) e^{2\pi i n \frac{t}{T}}.$$

Si on fait tendre T vers l'infini, on peut voir (en utilisant les sommes de Riemann et la décroissance des coefficients) que ceci tend vers

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi t} dt.$$

Un de nos objectifs sera d'obtenir, pour des classes de fonctions assez larges une démonstration de cette formule de "reconstruction" de la fonction f à partir de sa transformée $\hat{f}$.

1.2. **Définition.**

Définition 1.1. Soit f une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles ou complexes), on pose

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt,$$

et on appelle $\hat{f}$ la *Transformée de Fourier* de f.

On notera parfois $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ (surtout quand f sera remplacée par une formule un peu longue).

On remarque que cette intégrale converge car $|f(t)e^{-2\pi i \xi t}| = |f(t)|$, et par conséquent $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$.

Notons aussi que $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

1.3. **Opérations de base.** Dans la proposition qui suit, par abus de notation, des expressions comme “$f(x+h)$” signifient “la fonction qui à x associe $f(x+h)$”.

Proposition 1.2. Soit $f$telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ converge. Alors

(1) Pour $h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f(x+h)) = e^{2\pi i\xi h}\hat{f}(\xi)$.
(2) Pour $\delta > 0$, $\mathcal{F}(f(\delta x)) = \frac{1}{\delta}\hat{f}(\frac{\xi}{\delta})$.
(3) $\mathcal{F}(e^{-2\pi i x h}f(x)) = \hat{f}(\xi + h)$.
(4) Si de plus f est dérivable et que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|dx$ converge, $\mathcal{F}(f'(x)) = 2\pi i\xi\hat{f}(\xi)$.
(5) Si de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|dx$ converge, $\mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi) = \frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$.

Démonstration.
(2) : on procède au changement de variable $t = \delta x$, $dt = \delta dx$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta x)e^{-2\pi i\xi x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{t}{\delta})e^{-2\pi i\frac{\xi t}{\delta}}\frac{1}{\delta}dt.$$

(4) : On intègre par parties : $u = e^{-2\pi i\xi x}$, $u' = -2\pi i\xi e^{-2\pi i\xi x}$, $v' = f'$, $v = f$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-2\pi i\xi x}dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-2\pi i\xi)e^{-2\pi i\xi x}dx;$$

cette formule est justifiée parce que l'intégrale qui apparaît dans le membre de gauche est absolument convergente, et parce que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.
(5) : on utilise la dérivation sous l'intégrale :

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-2\pi i x)e^{-2\pi i\xi x}dx = \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi).$$

$\square$

1.4. **Lemme de Riemann-Lebesgue.** Nous allons donner une version d'un résultat important, qui se retrouve dans des cadres plus généraux. La démonstration est plus délicate que la plupart de celles que nous ferons.

Théorème 1.3. *Si f et continue et que f est* absolument intégrable *sur $\mathbb{R}$, alors $\hat{f}$ est continue et* $\lim_{|\xi|\to\infty}\hat{f}(\xi) = 0$.

Idée de la démonstration :
L'hypothèse dit que $\int_{|x|\geq A} |f(x)|dx$ est petite pour A assez grand. La remarque après la définition de la série de Fourier — $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f|$ — montre donc que si on choisit un $\varepsilon' > 0$, on peut prendre $A > 0$ assez grand pour que $\left|\mathcal{F}(f\mathbf{1}_{]-\infty,-A[\cup]A,+\infty[})(\xi)\right| \leq \varepsilon'$ pour tout ξ. On peut donc, pour les deux propriétés voulues, se ramener à une fonction à support borné, $f\mathbf{1}_{[-A,A]}$.

Pour démontrer la continuité, on estime $|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi+h)|$ grâce à la Proposition 1.2(3). Pour démontrer que $\hat{f}$ tend vers zéro à l'infini, il faut utiliser l'uniforme continuité de $f\mathbf{1}_{[-A,A]}$, qui est donnée par le théorème de Heine (cf. ci-dessous) et approximer f par une fonction en escalier, car la transformée de Fourier d'une telle fonction en escalier, explicitement connue, sera petite à l'infini (et celle de la différence bornée par un nombre petit, toujours par la remarque initiale).

On peut aussi approximer f par une fonction $\mathcal{C}^1$, dont on voit que la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini en faisant une intégration par parties (ou en appliquant la Proposition 1.2(4)).

1.5. **Appendice : Uniforme continuité, Théorème de Heine.**

Définition 1.4. On dit qu'une fonction f est *uniformément continue* sur un ensemble I si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x, y \in I$ et $|x - y| \leq \delta$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Commentaire : cela ressemble beaucoup à la définition de la continuité, et de fait cela implique la continuité (ordinaire), mais c'est plus fort. La différence est que d'habitude δ dépend de x (et de ε), alors qu'ici un même δ dépendant de ε est valable pour tous les $x \in I$.

Exemples : $f(x) = ax + b$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ($\delta = \varepsilon/|a|$ marchera), $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[-1, +1]$ ($\delta = \varepsilon/4$ par exemple), mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (pour tout δ donné, si $x \geq \frac{1}{\delta}$, alors $(x + \delta/2)^2 > x + 1$).

Théorème 1.5. *(Théorème de Heine)*
Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue.

2. Espace de Schwartz, inversion, convolution

2.1. Espace de Schwartz. Pour utiliser commodément les propriétés de la Proposition 1.2, on va se placer dans un espace qui est stable par les deux opérations de base que sont la dérivation et la multiplication par la variable x. Nous allons voir que la transformation de Fourier enverra cet espace dans lui-même, et mieux encore : que c'est une bijection, et isométrique dans un sens à définir.

On rappelle que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment (continûment) dérivables.

Définition 2.1. L'espace de (Laurent) Schwartz est défini par

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall k, n \in \mathbb{N}, x^n f^{(k)}(x) \text{ est bornée sur } \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque : cette définition implique aussi que pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, la fonction $x^n f^{(k)}(x)$ tend vers zéro à l'infini, et est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ (il faut appliquer la définition en changeant les valeurs de n).

Proposition 2.2. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème 2.3. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Il faut voir que la fonction $\xi^n \left(\frac{d}{d\xi}\right)^k \hat{f}(\xi)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Or d'après la Proposition 1.2, cette fonction est la transformée de Fourier de $\frac{1}{(2\pi i)^n} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[(-2\pi i x)^k f(x)\right]$, et donc doit être bornée par la remarque initiale après la définition 1.1. $\square$

2.2. **Gaussiennes et identité approchée.**

Proposition 2.4. Soit $G(x) := e^{-\pi x^2}$ (gaussienne). Alors $G \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\hat{G}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$ (autrement dit, la gaussienne est sa propre transformée de Fourier).

Démonstration. Pour voir que $G \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on démontre par récurrence que $G^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-\pi\xi^2}$, où P_k est un polynôme de degré borné par k.

Pour calculer la transformée de Fourier, posons $F(\xi) := \hat{G}(\xi)$. Alors, en appliquant la Proposition 1.2,

$$F'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi x}(-2\pi ix)e^{-\pi x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ie^{-2\pi i\xi x}G'(x)dx = i\cdot(2\pi i\xi)\hat{G}(\xi) = -2\pi\xi F(\xi).$$

On a donc une équation différentielle pour F, et on sait que $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1$. La solution est unique, et vaut $F(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$. □

Un corollaire immédiat (en utilisant la Proposition 1.2 (2)) est que si on pose $G_\delta(x) := e^{-\pi\delta x^2}$, pour $\delta > 0$, alors

$$\hat{G}_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi\frac{x^2}{\delta}} =: K_\delta(x), \text{ and } \hat{K}_\delta(x) = G_\delta(x).$$

Définition 2.5. Une famille de fonctions $(\rho_\delta)_{\delta>0}$ est appelée *identité approchée* si et seulement si :

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\delta(x)dx = 1$ et $\rho_\delta(x) \geq 0$;
(2) Pour tout $\eta > 0$, $\lim_{\delta\to 0}\int_{|x|>\eta}\rho_\delta(x)dx = 0$.

Proposition 2.6. La famille (K_δ) fournit une identité approchée.

Nous allons avoir besoin d'un outil important, le **produit de convolution.** *Certaines propriétés en seront données plus bas.*

Définition 2.7. Si g est une fonction telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|dx$ converge, et si f est une fonctions bornée, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $M_f > 0$ tel que $|f(x)| \leq M_f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on pose

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

Proposition 2.8. Si $(\rho_\delta)_{\delta>0}$ est une identité approchée, et si f est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\lim_{\delta\to 0} f * \rho_\delta(x) = f(x)$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Remarque : si f est continue et $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, alors f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (exercice).

Idée de la démonstration :

$$\begin{aligned}|f * K_\delta(x) - f(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x-t) - f(x))\,K_\delta(t)dt\right| \\ &\leq \int_{|t|\geq\eta}|f(x-t) - f(x)|\,K_\delta(t)dt + \int_{|t|\leq\eta}|f(x-t) - f(x)|\,K_\delta(t)dt.\end{aligned}$$

Par uniforme continuité, on prend $\eta > 0$ suffisamment petit pour que $|t| \leq \eta$ implique $|f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. Donc le deuxième terme est majoré par $\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}$.

Cet η étant fixé, on prend δ assez petit pour que

$$\int_{|t|\geq\eta} K_\delta(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty},$$

ce qui implique que le premier terme est lui aussi majoré par $\varepsilon/2$. □

2.3. **Un théorème à la Fubini.** Nous allons devoir admettre un théorème sur les intégrales en deux variables.

Considérons une fonction $F(x, y)$ de deux variables sur un produit d'intervalles ouverts $I \times J$. La fonction F est supposée intégrable (et donc bornée) sur tout ensemble de la forme $I_0 \times J_0$, où $I_0 \subset I$, $J_0 \subset J$ sont des intervalles fermés et bornés. Nous savons déjà (d'après le cours de calcul différentiel du S3) que

$$\int_{J_0}\left(\int_{I_0} F(x,y)dx\right)dy = \int_{I_0}\left(\int_{J_0} F(x,y)dy\right)dx,$$

et ce nombre définit $\int_{I_0\times J_0} F(x,y)dxdy$. Mais nous considérons maintenant des intervalles I, J qui peuvent ne pas être bornés, et aux extrémités de I et J la fonction F peut aussi tendre vers l'infini.

Théorème 2.9. *Supposons que pour tout $y \in J$, $\sup_{I_0\subset I}\int_{I_0}|F(x,y)|dx < +\infty$ (autrement dit, la fonction $F(\cdot, y)$ est absolument intégrable sur I), et que*

$$\sup_{J_0\subset J}\int_{J_0}\left(\sup_{I_0\subset I}\int_{I_0}|F(x,y)|dx\right)dy < +\infty$$

(autrement dit, la fonction $y \mapsto \int_I |F(x,y)|dx$ est intégrable sur J), alors la fonction $x \mapsto \int_J |F(x,y)|dy$ est intégrable sur I et on a

$$\int_J\left(\int_I F(x,y)dx\right)dy = \int_I\left(\int_J F(x,y)dy\right)dx.$$

Par exemple, si les intégrales itérées de la valeur absolue (prises dans un ordre ou autre) convergent, on peut faire l'intégrale d'une fonction de deux variables sur le plan tout entier en commençant par l'une ou l'autre variable (et en intégrant par rapport à la seconde ensuite), tout sera bien défini, et on obtiendra le même résultat avec les deux procédés.

Attention, tout ceci peut échouer si on n'a pas la convergence de l'intégrale de $|F|$. Prenons par exemple sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

$$f(x,y) := \sin(x-y) \text{ pour } y \leq x \leq y + 2\pi, \quad f(x,y) := 0 \text{ ailleurs.}$$

On calcule facilement que $\int_0^{+\infty} f(x,y)dx = 0$ (l'intégrale est prise en fait sur un intervalle fini), et donc $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)dxdy = 0$.

D'autre part, $\int_0^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{x-2\pi}^{x}\sin(x-y)dy = 0$ pour $x \geq 2\pi$, mais pour $x < 2\pi$ on trouve $\int_0^x \sin(x-y)dy = 1-\cos x$. Ce qui implique $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)dydx = \int_0^{2\pi}(1-\cos x)dx = 2\pi$: les intégrales itérées convergent toutes les deux, mais leurs valeurs sont différentes.

C'est le même phénomène que celui qui se produit avec les séries semi-conergentes : en changeant l'ordre de sommation, on peut changer le résultat.

2.4. **Formule d'inversion.**

Proposition 2.10. (Formule de multiplication)
Soient f et g absolument intégrables sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)g(y)dy.$$

Remarquons que les deux intégrables ci-dessus sont absolument convergentes, car f est absolument intégrable et $\hat{g}$ est bornée, et vice-versa.

Bien entendu, un cas (très) particulier des hypothèses est celui où $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Posons $F(x,y) := f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}$. Alors $|F(x,y)| = |f(x)||g(y)|$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx\right) dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|dy\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx\right).$$

On peut donc appliquer le Théorème 2.9. $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)dy = f(x)\hat{g}(x)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)dx = \hat{f}(y)g(y)$, et on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)g(y)dy.$$

□

Théorème 2.11. *Si f et $\hat{f}$ sont absolument intégrables sur $\mathbb{R}$ (en particulier, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), alors*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi.$$

Démonstration. Par un changement de variable $x \mapsto -x$ et grâce à la parité de K_δ,

$$f * K_\delta(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)K_\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)K_\delta(-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)K_\delta(x)dx.$$

On applique la formule de multiplication avec $g = G_\delta$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)K_\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)G_\delta(y)dy.$$

On a déjà vu que $\lim_{\delta\to 0} f * K_\delta(0) = f(0)$.

On sait que $\lim_{\delta\to 0} G_\delta(y) = 1$, et on veut passer la limite "à l'intérieur de l'intégrale". Une application du Théorème des Accroissements Finis montre que $|e^{-x}-1| \leq x$ pour tout $x \geq 0$. Donc $|G_\delta(y) - 1| \leq \pi\delta A^2$ pour $|y| \leq A$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on choisit A assez grand pour que

$$\int_{|y|\geq A} |\hat{f}(y)G_\delta(y)|dy \leq \int_{|y|\geq A} |\hat{f}(y)|dy < \varepsilon/4,$$

et on a d'autre part, une fois A fixé,

$$\left|\int_{-A}^{A}\hat{f}(y)dy-\int_{A}^{A}\hat{f}(y)G_\delta(y)dy\right|\leq\int_{-A}^{A}|\hat{f}(y)||1-G_\delta(y)|dy$$
$$\leq\pi\delta A^2\int_{-A}^{A}|\hat{f}(y)|dy\leq\pi\delta A^2\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(y)|dy<\varepsilon/2$$

pour δ assez petit.

(On peut aussi démontrer la convergence plus rapidement en appliquant le théorème de convergence dominée).

Nous avons donc établi $f(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(y)dy$, c'est le cas $x=0$ de notre théorème.

Pour obtenir le cas général, on pose $f_x(t):=f(x+t)$. On applique ce qu'on vient de démontrer à cette fonction de t, en se rappelant que $\hat{f}_x(\xi)=e^{2\pi ix\xi}\hat{f}(\xi)$:

$$f(x)=f_x(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}_x(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi.$$

□

Nous avons en fait établi que la transformée de Fourier est une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour le voir, nous avons besoin d'une notation : on pose $\check{f}(x):=f(-x)$. Le changement de variable $x'=-x$ nous montre que

(1)
$$\mathcal{F}(\check{f})(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(-x)e^{-2\pi i\xi x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x')e^{2\pi i\xi x'}dx'=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x')e^{-2\pi i(-\xi)x'}dx'=\hat{f}(-\xi).$$

Proposition 2.12. La transformation de Fourier est une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et son application inverse est donnée par $f\mapsto\mathcal{F}(\check{f})$.

Démonstration. On sait déjà que $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'après le Théorème 2.3.

Le théorème 2.11, et l'équation (1) appliquée à $\hat{f}$ au lieu de f, montrent que toute fonction $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est la transformée de Fourier de $(\hat{f})\check{}$. Donc $\mathcal{F}$ est surjective.

D'autre part, si $\hat{f}=\hat{g}$, alors $(\hat{f})\check{}=(\hat{g})\check{}$, et en appliquant la transformée de Fourier aux deux côtés de l'équation, on voit que $f=g$, donc $\mathcal{F}$ est bijective sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

2.5. **Formule de Plancherel.**

Théorème 2.13. *Soient f et $g\in\mathcal{DM}(\mathbb{R})$, alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi.$$

En particulier, si $f=g$, on voit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

Donc la transformation de Fourier est une isométrie pour la norme définie par $\|f\|^2:=\int|f|^2$.

Démonstration. En utilisant le fait que $\overline{\int f} = \int \overline{f}$, on voit facilement que $\overline{g(x)} = \mathcal{F}(\overline{\hat{g}})(x)$. Donc, d'après la formule de multiplication,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathcal{F}(\overline{\hat{g}})(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\overline{g(x)}.$$

□

2.6. **Propriétés du produit de convolution.** Remarque : beaucoup d'autres propriétés du produit de convolution sont traitées en Travaux Dirigés (Feuille numéro 3).

Proposition 2.14. Soient f, g deux fonctions bornées telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|$ converge.

Alors $f * g(x) = g * f(x)$.

Démonstration. Pour x fixé, on fait le changement de variable $u = x - t$. Alors

$$f*g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(u)g(x-u)(-du) \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du = g*f(x).$$

□

Théorème 2.15. *Soient f, g deux fonctions bornées telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|$ converge. On suppose de plus que f est dérivable et que sa dérivée f' est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. Alors $f * g$ est dérivable et que*

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = f' * g(x).$$

Démonstration. On va appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale. Les hypothèses impliquent que pour tout $x, t \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x-t)g(t)| \leq \sup_{\mathbb{R}} |f'||g(t)|,$$

donc on a l'hypothèse de domination par une fonction intégrable indépendante de x, donc $f * g(x)$ est dérivable et

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x-t)g(t)dt = f' * g(x).$$

□

2.7. **Transformée de Fourier d'une convolution.**

Théorème 2.16. *Si f et g sont absolument intégrables et bornées, alors $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.*

Démonstration. On veut appliquer le théorème de Fubini pour changer l'ordre dans l'intégrale double

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} f(x-t)g(t)dtdx.$$

En effet,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-2\pi i x\xi} f(x-t)g(t)\right| dxdt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)|\, dxdt$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx\right) < +\infty.$$

On a alors, d'après les définitions de la transformée de Fourier et du produit de convolution,

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt\right)dx,$$

ce qui donne en appliquant le changement d'ordre dans l'intégration, puis la propriété sur la transformée de Fourier de $f(x-t)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)e^{-2\pi i x\xi}dx\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2\pi i t\xi}\hat{f}(\xi)dt = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

□

Corollaire 2.17. Si $f, g, \hat{f}, \hat{g}$ sont absolument intégrables (en particulier si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), alors $\widehat{fg}(\xi) = \hat{f}(\xi) * \hat{g}(\xi)$.

Démonstration. On remarque que $\hat{f}\hat{g}$ est absolument intégrable, par exemple parce que $\hat{f}$ est absolument intégrable et $\hat{g}$ est bornée.

D'autre part, si u et v sont absolument intégrables et bornées, alors $\check{u} * \check{v} = (u*v)\check{}$. En effet, en faisant le changement de variable $t' = -t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(-(x-t))v(-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(-x-t'))v(t')dt' = u*v(-x).$$

On a vu en TD (Feuille 3) que si f et g sont absolument intégrables, alors $f*g$ l'est aussi.

Donc, d'après le théorème sur la transformée de Fourier d'un produit de convolution, $\mathcal{F}\left((\hat{f}*\hat{g})\check{}\right) = \mathcal{F}\left((\hat{f})\check{} * (\hat{g})\check{}\right) = \mathcal{F}\left((\hat{f})\check{}\right)\mathcal{F}\left((\hat{g})\check{}\right) = fg$, d'après le théorème d'inversion de Fourier.

En appliquant la transformée de Fourier des deux côtés, et à nouveau le théorème d'inversion de Fourier au premier terme, on voit que $\hat{f} * \hat{g} = \mathcal{F}(fg)$. □

3. Espaces de Hilbert

La quantité $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$ joue le rôle d'une norme au carré. Mais l'espace des fonctions est de dimension infinie.

Notre but est de donner ici un aperçu de la théorie des espaces de Hilbert, qui généralisent les espaces euclidiens que vous connaissez déjà. Les difficultés spécifiques sont que la convergence des suites peut être problématique, et qu'on ne peut pas trouver de base finie, ce qui conduit à la notion de *base hilbertienne* (différente de celle de base au sens habituelle). Pour une définition et quelques exemples de cette notion, voir la feuille 4 de TD.

3.1. **Produit hermitien.** Nous faisons ici quelques rappels de ce qui a déjà été vu en cours d'algèbre linéaire.

On se place dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$.

Définition 3.1. Une application $E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à un couple de vecteurs (x, y) associe le scalaire $\langle x, y\rangle$ est dite *produit hermitien* (ou scalaire, ou intérieur) si et seulement si

(1) Pour tout $y \in E$, $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire ;
(2) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$;
(3) $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

On appelle *norme* d'un vecteur le réel positif $\|x\| := \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$.

La distance de deux vecteurs x, y est donnée par $\|x - y\|$.

Exemple 3.2. (1) $E = \mathcal{C}([a, b])$, $\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$.
(2) $E = \mathbb{C}[X]|_{\mathbb{R}}$ (les polynômes à coefficients complexes, de variable réelle), $\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\overline{Q(x)}e^{-x^2}dx$.
(3) $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$.

Théorème 3.3. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*
Pour tous $x, y \in E$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

Un corollaire de cette inégalité est que la "distance" que nous avons définie ci-dessus vérifie bien *l'inégalité triangulaire* : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, et par conséquent aussi $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.

Il existe de nombreuses autres sortes de "normes" qui n'ont pas toutes les bonnes propriétés des normes provenant d'un produit scalaire. La propriété suivante caractérise en fait ces dernières (mais nous ne le montrerons pas).

Proposition 3.4. (Identité du parallélogramme)
Pour tous vecteurs $x, y \in E$,
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Démonstration.
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = \|x\|^2+2\langle x, y\rangle+\|y\|^2+\|x\|^2-2\langle x, y\rangle+\|y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$
□

Une autre propriété des normes issues d'un produit hermitien (ou scalaire) est la suivante.

Théorème 3.5. *(Unicité de la projection)*
Soit V un sous-espace vectoriel de E, $x_0 \in E$. Si il existe $y_0 \in V$ qui réalise la plus courte distance de x_0 à V, c'est-à-dire
$$\|x_0 - y_0\| = \min_{y \in V} \|x_0 - y\|,$$
y_0 est unique, et est l'unique vecteur $y \in V$ tel que $x_0 - y$ soit orthogonal à V, c'est-à-dire que
$$\langle x_0 - y, z\rangle = 0, \text{ pour tout } z \in V.$$

De plus, si $(p_n)_n \subset V$ *avec* $\lim_{n\to\infty} \|p_n - x_0\| = \inf_{p\in V} \|x - p\|$ *(suite minimisante), la suite* $(p_n)_n$ *est de Cauchy.*

Le vecteur y_0 est appelé *projection (orthogonale)* de x_0 sur V.

Démonstration. Soient p_0 et $p_1 \in V$, $x_0 \in E$. On applique l'identité du parallélogramme avec $x = p_0 - x_0$ et $y = p_1 - x_0$. Alors

$$\|p_0 - x_0 + p_1 - x_0\|^2 = 2\|p_0 - x_0\|^2 + 2\|p_1 - x_0\|^2 - \|p_0 - p_1\|^2,$$

donc en divisant par 4,

$$\left\|\frac{p_0 + p_1}{2} - x_0\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|p_0 - x_0\|^2 + \|p_1 - x_0\|^2\right) - \frac{1}{4}\|p_0 - p_1\|^2.$$

En particulier, si on pose $m := \operatorname{dist}(x_0, V) := \inf_{p\in V} \|x - p\|$, alors si $\|p_0 - x_0\|^2, \|p_1 - x_0\|^2 \leq m^2 + \delta$, on aura

$$\|p_0 - p_1\|^2 = 2\left(\|p_0 - x_0\|^2 + \|p_1 - x_0\|^2 - 2\left\|\frac{p_0 + p_1}{2} - x_0\right\|^2\right) \leq 2m^2 + 2\delta - 2m^2 = 2\delta.$$

Ceci a deux conséquences : si la borne inférieure est atteinte par p_0, p_1 tels que $m = \|p_0 - x_0\| = \|p_1 - x_0\|$, alors $p_0 = p_1$; et toute suite minimisante est une suite de Cauchy. □

Attention ! il se pourrait très bien qu'aucune projection n'existe. Par exemple, prenons E l'espace des fonctions continues par morceaux (et donc bornées) sur $[-1, 1]$, muni du même produit hermitien que dans l'exemple (1), et V le sous-espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$. Alors si on prend $f_0 = \chi_{[0,1]}$, elle n'a pas de projection sur V. La raison est qu'on peut approcher f_0 d'aussi près qu'on veut par des fonctions continues ; la projection "devrait" donc être f_0 elle-même, mais elle n'est pas dans V, puisque discontinue.

3.2. **Espaces complets et de Hilbert.** On rappelle les notions topologiques de suite de Cauchy et d'espace complet :

Définition 3.6. Une suite (u_n) est dite *suite de Cauchy* si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq N$, alors $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$. Remarque : en particulier, toute suite convergente est de Cauchy.

Un espace vectoriel normé est dit *complet* si toute suite de Cauchy est convergente.

Définition 3.7. Un espace vectoriel muni d'un produit hermitien est un *espace de Hilbert* si et seulement si il est complet (pour la norme induite par le produit hermitien).

Un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert est à nouveau de Hilbert. Reprenons la situation du Théorème 3.5. L'identité du parallélogramme permet de montrer que si (y_n) est une suite telle que $\lim_n \|x_0 - y_n\| = \inf_{y\in V} \|x_0 - y\|$, alors la suite (y_n) est de Cauchy. Donc elle sera convergente. La projection sur un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert est donc toujours définie et unique.

Cela nous demanderait trop de temps de donner rigoureusement des exemples d'espaces de Hilbert. Nous citerons deux cas importants.

L'ensemble des suites à valeurs complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 < +\infty$ forme un espace de Hilbert. C'est celui qui intervient naturellement quand on considère les séries de Fourier.

On peut définir une notion d'intégrale (due à Henri Lebesgue, plus compliquée que l'intégrale de Riemann) qui permette de définir un ensemble des fonctions de carré intégrable sur la droite réelle, qui est un espace de Hilbert, noté $L^2(\mathbb{R})$. Cela implique des limites de suites assez "monstrueuses" soient admises dans l'espace, mais cela permet une théorie très satisfaisante. L'espace contient toutes les fonctions avec lesquelles nous avons déjà travaillé, et l'intégrale donne le même résultat. Ce sujet sera étudié en L3.

Théorème 3.8. *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe une suite (g_n) d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\lim_n \|f - g_n\| = 0$.*

Admis. La démonstration utilise, en particulier, la convolution par des identités approchées.

Théorème 3.9. *La transformation de Fourier s'étend à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ comme l'unique prolongement continu de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En particulier, on aura encore $\|\hat{f}\| = \|f\|$.*

C'est un cas particulier d'un théorème (facile) de topologie sur le prolongement des applications uniformément continues dans un espace complet.

4. Applications

4.1. Principe d'incertitude de Heisenberg.

Théorème 4.1. *Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$. Alors*

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Avec des changements de variables faciles, on voit que pour tout $x_1, \xi_1 \in \mathbb{R}$,

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_1)^2 |\psi(x)|^2 dx\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \xi_1)^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Quand $x_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi(x)|^2 dx$, $\xi_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} \xi|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$, cela s'interprète comme le produit des variances de la position et de l'impulsion (en mécanique quantique).

4.2. Equation de la chaleur.

Si $u(t, x)$ représente la température au point x et au temps t, la fonction satisfait l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Si on a la condition initiale $u(0, x) = u_0(x)$, on peut voir (sous les bonnes hypothèses), en appliquant la transformation de Fourier par rapport à x à l'équation, que la solution est donnée par $u(t, x) = H_t * u_0(x)$, où la convolution est prise par rapport à la variable x et H_t est le noyau de la chaleur :

$$H_t(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}.$$

4.3. **Fonctions harmoniques.**

Définition 4.2. Une fonction $u(x, y)$ est dite *harmonique* si elle satisfait l'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Théorème 4.3. *Si une fonction est harmonique et bornée sur le demi-plan supérieur ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, continue sur le demi-plan supérieur fermé $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, et que ses valeurs sur la droite réelle sont données par $u(x, 0) = u_0(x)$, alors $u(x, y) = u_0 * P_y(x)$, où la convolution est prise par rapport à la variable x et P_y est le noyau de Poisson :*

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Pour finir, on montre que les fonctions harmoniques vérifiaient le principe du maximum (tout comme les modules de fonctions holomorphes).