ANALYSE COMPLEXE 2, PARCOURS SPÉCIAL L3 MATHÉMATIQUES

PASCAL J. THOMAS

Pré-requis : analyse complexe 1.

5. Principe du module maximum

Théorème 1. *Soit Ω un ouvert connexe, f analytique sur Ω, alors si $|f|$ admet un maximum local, la fonction f est constante.*

Démonstration. Soit $a \in \Omega$ un maximum local de $|f|$, c'est-à-dire qu'il existe r_0 tel que pour tout $z \in D(a, r_0)$, $|f(a)| \geq |f(z)|$. Alors $f(a) = |f(a)|e^{i\theta_0}$ et si on considère la fonction $g(z) := e^{-i\theta_0} f(z)$, on a pour tout z, $|g(z)| = |f(z)|$, et $g(a) = \operatorname{Re} g(a) = |g(a)|$.

Mais la fonction g vérifie la formule de la moyenne : $g(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + re^{i\theta}) d\theta$, pour tout $r \in [0, r_0[$. Donc en prenant la partie réelle des deux côtés,

$$\operatorname{Re} g(a) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + re^{i\theta}) d\theta \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g(a + re^{i\theta}) d\theta,$$

donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{Re} g(a) - \operatorname{Re} g(a + re^{i\theta}) \right) d\theta = 0.$$

Or d'après la propriété de maximum local, $\operatorname{Re} g(a) = |g(a)| \geq \left| g(a + re^{i\theta}) \right| \geq \operatorname{Re} g(a + re^{i\theta})$, donc l'intégrande est toujours positive, et comme l'intégrale est nulle, l'intégrande doit être identiquement nulle. Finalement, $\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re} g(a)$ pour tout $z \in D(a, r_0)$. Mais alors $g - g(a)$ est analytique et imaginaire pure, donc constante sur $D(a, r_0)$, donc nulle sur ce disque ; d'après le Théorème du Prolongement analytique, comme Ω est connexe, elle doit être identiquement nulle sur Ω, donc g est constante, donc f est constante. $\square$

Remarque : on a démontré au passage que la même propriété est vérifiée par $\operatorname{Re} f$.

Corollaire 2. *Si Ω est un ouvert connexe borné, que f est analytique sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$, alors il existe $z_0 \in \partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$ tel que $|f(z_0)| = \max_{\overline{\Omega}} |f|$.*

En effet, comme $\overline{\Omega}$ est un fermé borné de $\mathbb{C}$, la fonction continue $|f|$ atteint son maximum dessus. Si ce maximum est atteint en un point a qui n'est pas sur $\partial\Omega$, alors c'est un maximum local (parce qu'il y a un disque $D(a, r) \subset \Omega$) et on peut appliquer le théorème, mais alors f est constante et son maximum est atteint partout, donc sur la frontière. Donc dans tous les cas il est atteint sur la frontière.

Remarque. En fait, dans le corollaire, l'hypothèse de connexité de Ω n'est pas nécessaire : on peut travailler sur chaque composante connexe de Ω.

6. Équivalence entre $\mathbb{C}$-dérivabilité et analyticité

6.1. **$\mathbb{C}$-dérivabilité et $\mathbb{R}$-différentiabilité.** On sait qu'une fonction $f : U \longrightarrow F$, où E, F sont des $\mathbb{K}$-espace vectoriels normés et $U \subset E$ un ouvert, est différentiable au point $a \in U$ ssi il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ telle que

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h),$$

où $\lim_{h\to 0} \|h\|^{-1}o(h) = 0$. On note souvent $L(h) = Df(a)(h)$, ou en coordonnées a $Df(a)(h) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j$. En notant dx_j la forme linéaire qui à un vecteur x associe la coordonnée x_j, on obtient la formulation équivalente (interprétée en physique en termes de "petits accroissements") :

$$df := Df(a) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)dx_j.$$

Quand $E = F = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on retrouve la définition de la dérivabilité au sens complexe. Quand on a toujours $E = F = \mathbb{C}$ mais $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, comme $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, on a deux dérivées partielles, notées $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$. Si on note $dz := dx+idy$, $d\bar{z} := dx-idy$, on voit après résolution d'un système d'équations très simple que :

$$\begin{aligned} Df(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)d\bar{z} =: \frac{\partial f}{\partial z}(a)dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)d\bar{z} \end{aligned}$$

La fonction f sera dérivable au sens complexe au point a si et seulement si l'application $\mathbb{R}$-linéaire ci-dessus est aussi $\mathbb{C}$-linéaire, en pratique, si $L(ih) = iL(h)$, ou en notation réelle $L(-h_2, h_1) = iL(h_1, h_2)$. On vérifie facilement que dz est $\mathbb{C}$-linéaire (en tant qu'application linéaire, c'est l'identité sur $\mathbb{C}$) et que $d\bar{z}$ ne l'est pas. Donc les équations de Cauchy-Riemann en a sont équivalentes (comme on peut aussi le vérifier directement) à $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$.

6.2. **Notations pour les intégrales de chemins.** Si on a deux chemins γ_1, γ_2 définis respectivement sur $[a, b]$ et $[b, c]$, avec $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, leur *concaténation* est la courbe γ donnée par $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ pour $a \le t \le b$ et $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ pour $b \le t \le c$. Si γ_2 est définie sur un intervalle $[b', c]$, on peut le reparamétrer en prenant $t' = t - b' + b$ et procéder à la concaténation dès que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b')$.

On note $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$, à cause du fait que pour toute forme différentielle φ, $\int_\gamma \varphi = \int_{\gamma_1} \varphi + \int_{\gamma_2} \varphi$. Du coup, on peut définir $\gamma_1 + \gamma_2$ par cette formule, même si les deux chemins ne se raccordent pas. Evidemment, ce n'est plus un chemin, parce qu'il peut ne pas être continu.

De même le chemin correspondant à γ parcouru dans le sens inverse, paramétré par exemple par $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(a + b - t)$, pour $a \le t \le b$, est noté $-\gamma$. On remarque que $\gamma + (-\gamma) = 0$, dans le sens où $\int_{-\gamma} \varphi = -\int_\gamma \varphi$, pour toute forme φ.

6.3. **Existence de primitives.** Nous avons vu dans la première partie du cours qu'une fonction holomorphe *et* de classe $\mathcal{C}^1$ sera analytique. Nous nous intéressons à l'existence de primitives parce que si f est seulement holomorphe mais que de plus $f(z) = F'(z)$, alors F est holomorphe par construction, et de classe $\mathcal{C}^1$ puisque f, étant dérivable, doit être continue, et donc F est analytique, et donc $f = F'$ est analytique, cqfd. Il nous reste à trouver un moyen de trouver un F, f étant donnée...

Nous avons déjà vu que si $f(z) = F'(z)$, où γ est paramétrée par un intervalle $[a;b]$, alors $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. La réciproque est vraie.

Proposition 3. *Soit Ω un ouvert connexe, $z_0 \in \Omega$. Soit f une fonction continue de Ω dans $\mathbb{C}$.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe une unique fonction F telle que $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$ et $F(z_0) = 0$.

(2) Pour tout chemin fermé γ dans Ω, $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0$.

(3) Pour tous chemins γ_1, γ_2 de $[0;1]$ dans Ω tels que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, alors $\int_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_2} f(\zeta)d\zeta$.

Démonstration.

(1)⇒(2) : Soit F la fonction du (1),

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \int_\gamma F'(\zeta)d\zeta = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0,$$

puisque $\gamma(b) = \gamma(a)$.

(2)⇒(3) : Posons $\gamma := \gamma_1 + (-\gamma_2)$. C'est un chemin fermé, donc

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta - \int_{\gamma_2} f(\zeta)d\zeta.$$

(3)⇒(1) : Comme Ω est connexe, pour tout $z \in \Omega$ il existe un chemin γ_z polygonal, donc $\mathcal{C}^1$ par morceaux (admis temporairement) qui relie z_0 au point z.

On pose $F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta$. Grâce à la propriété (3), cela ne dépend pas du choix de γ_z. Considérons h avec $[|h| < r$, où $r > 0$ est choisi tel que $D(z,r) \subset \Omega$. Alors le segment de droite $[z; z+h]$ est contenu dans Ω. Nous l'assimilons au chemin $[0;1] \ni t \mapsto z + th \in \Omega$. Par indépendance du choix du chemin,

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_{\gamma_z + [z;z+h]} f(\zeta)d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta = \int_{[z;z+h]} f(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{[z;z+h]} f(z)d\zeta + \int_{[z;z+h]} \left(f(\zeta) - f(z)\right) d\zeta = hf(z) + \int_{[z;z+h]} \left(f(\zeta) - f(z)\right) d\zeta. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$; par continuité de f, il existe $r_1 \leq r$ tel que pour $|\zeta - z| < r_1$, $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. Si on prend $|h| < r_1$, cette propriété est toujours vérifiée pour $\zeta \in [z; z+h]$, et donc la dernière intégrale est majorée par $|h| \cdot \varepsilon$, le terme de reste est donc bien un $o(h)$ et on a la propriété de différentiabilité (i.e. dérivabilité en l'occurrence) complexe.

Pour voir l'unicité, si on avait une autre fonction F_1 telle que $F_1' = f$, alors pour tout chemin γ reliant z_0 à z, $F_1(z) = F_1(z) - F_1(z_0) = \int_\gamma f(z)dz = F(z) - F(z_0) = F(z)$. □

Nous pouvons donner maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 4. *Soit Ω un ouvert convexe et f une fonction holomorphe ($\mathbb{C}$-dérivable) en tout point de Ω. Alors f admet une primitive sur Ω.*

Corollaire 5. *Soit Ω un ouvert (quelconque) et f une fonction holomorphe ($\mathbb{C}$-dérivable) en tout point de Ω. Alors f est analytique sur Ω.*

Démonstration 1. Il suffit de montrer que pour tout $a \in \Omega$, et $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$, alors f est analytique sur $D(a,r)$. Nous savons déjà que c'est le cas si f est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit F une primitive de f sur $D(a,r)$ (qui est convexe). Alors F est holomorphe sur le disque, et ses dérivées partielles, données par

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = f(z) + 0,$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i\frac{\partial F}{\partial z} - i\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = if(z) - 0,$$

sont continues puisqu'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable est continue. Donc en appliquant le théorème 28 du cours d'Analyse Complexe 1, on obtient que F est analytique, et donc sa dérivée au sens complexe est aussi analytique. $\square$

Démonstration 2. Considérons à nouveau un disque $D(a,r) \subset \Omega$. Alors l'intégrale de f sur tout chemin de Jordan contenu dans $D(a,r)$ sera nulle, puisque f admet une primitive. C'est la conclusion du Théorème de Cauchy (théorème 26 du cours d'Analyse Complexe 1), que nous obtenons ainsi en évitant d'utiliser la formule de Green-Riemann. On en déduit la formule de Cauchy, et à nouveau le fait que f est développable en série entière. $\square$

Le Théorème 4 découle de la proposition suivante :

Proposition 6. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω qui contient le triangle fermé T (son intérieur, et sa frontière). Alors*

$$\int_{\partial T} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

Ici ∂T désigne le chemin polygonal fermé obtenu par concaténation des trois segments qui sont les côtés du triangle, orientés pour qu'il soient parcourus dans le sens trigonométrique.

Démonstration du Théorème en admettant la Proposition 6. Soit $z_0 \in \Omega$. Comme Ω est convexe, on peut poser

$$F(z) := \int_{[z_0;z]} f(\zeta)d\zeta.$$

Si $D(z,r) \subset \Omega$ et $|h| < r$, alors par convexité de Ω le triangle de sommets $(z_0, z, z+h)$ est contenu dans Ω et d'après la proposition,

$$\int_{[z_0;z]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z;z+h]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z+h;z_0]} f(\zeta)d\zeta = 0,$$

autrement dit $F(z+h) - F(z) = \int_{[z;z+h]} f(\zeta)d\zeta$. On termine alors la démonstration comme la fin de celle de la Proposition 3. $\square$

Démonstration de la Proposition 6.

Pour tout triangle Δ de sommets A, B, C, soient A', B', C' les milieux respectifs de $[B,C]$, $[C,A]$, et $[A,B]$. On construit quatre sous-triangles $\Delta^{(1)}$ de sommets (A, C', B'), $\Delta^{(2)}$ de sommets (B, A', C'), $\Delta^{(3)}$ de sommets (C, B', A'), et $\Delta^{(4)}$ de sommets (A', B', C') ; chacun d'entre eux a pour périmètre la moitié de celui de Δ et pour diamètre (distance maximum entre deux de ses points) la moitié de celui de Δ.

Pour toute fonction continue définie sur Δ, les simplifications sur les segments $[A', B']$, $[B', C']$, $[C', A']$, orientés en sens opposés selon les triangles $\Delta^{(i)}$ dont ils font partie,

$$\int_\Delta f(\zeta)d\zeta = \sum_{i=1}^{4} \int_{\Delta^{(i)}} f(\zeta)d\zeta.$$

Nous définissons une suite de triangles T_n de la façon suivante : $T_0 := T$; une foids choisi T_n, en appliquant l'inégalité triangulaire à l'identité ci-dessus avec $\Delta = T_n$, on voit qu'il existe $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que

$$\left| \int_{T_n^{(i_0)}} f(\zeta)d\zeta \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_T f(\zeta)d\zeta \right|.$$

On pose $T_{n+1} := T_n^{(i_0)}$. Par une récurrence immédiate,

$$\left| \int_{T_n^{(i_0)}} f(\zeta)d\zeta \right| \geq 4^{-n} \left| \int_T f(\zeta)d\zeta \right|.$$

De plus, le périmètre de T_n (longueur du chemin T_n) vérifie $\ell(T_n) = 2^{-n}\ell(T)$, et $\operatorname{diam}(T_n) = 2^{-n}\operatorname{diam}(T)$.

Comme T est compact et $\operatorname{diam} T_n \to 0$, il existe $z_0 \in T$ tel que $\bigcap_n T_n = \{z_0\}$. La fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, donc

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z), \text{ où } r(z) = o(|z - z_0|).$$

Comme $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ est un polynôme et donc admet une primitive, son intégrale sur tout chemin fermé est nulle et

$$\int_{T_n} f(\zeta)d\zeta = \int_{T_n} r(\zeta)d\zeta.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $\zeta \in T_n$, $|r(\zeta)| \leq \varepsilon|\zeta - z_0| \leq \varepsilon \operatorname{diam} T_n \leq 2^{-n}\operatorname{diam}(T)\varepsilon$. Finalement

$$\left| \int_T f(\zeta)d\zeta \right| \leq 4^n \left| \int_{T_n} r(\zeta)d\zeta \right| \leq 4^n \ell(T_n) 2^{-n}\operatorname{diam}(T)\varepsilon \leq 4^n 2^{-n}\ell(T)2^{-n}\operatorname{diam}(T)\varepsilon \leq C\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_T f(\zeta)d\zeta = 0$. □

Les démonstrations ci-dessus impliquent une caractérisation des fonctions holomorphes/analytiques qui peut être assez commode.

Théorème 7. *(Théorème de Morera) Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω. Alors f est analytique dans Ω si et seulement si pour tout triangle T contenu dans Ω tel que $\hat{T} \subset \Omega$, on a $\int_T f(z)dz = 0$.*

L'équivalence pleine entre holomorphie et analyticité nous permet aussi de démontrer, sans recours au théorème d'inversion locale du calcul différentiel réel, le Théorème d'Inversion Locale pour les fonctions holomorphes.

Théorème 8. *Soit f holomorphe au voisinage d'un point a, avec $f'(a) \neq 0$. Alors il existe un voisinage U de a telle que f soit bijective sur U sur $f(U)$, $f(U)$ ouvert, et que la fonction réciproque g soit analytique de $f(U)$ dans U.*

Démonstration.

La fonction f est développable en série entière autour de a, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$. Donc pour z_1, z_2 dans le disque de convergence de la série,

$$f(z_1) - f(z_2) = a_1(z_1 - z_2) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(z_1 - z_2) \sum_{m=0}^{k-1} (z_1 - a)^{k-1-m}(z_2 - a)^m.$$

Pour $z_1, z_2 \in D(a, r)$ avec $r > 0$ assez petit,

$$\left| \sum_{k=2}^{\infty} a_k \sum_{m=0}^{k-1} (z_1 - a)^{k-1-m}(z_2 - a)^m \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| k r^{k-1} < \frac{1}{2}|a_1|,$$

donc $|f(z_1) - f(z_2)| \geq \frac{1}{2}|a_1||z_1 - z_2|$, ce qui implique que f est injective sur $D(a, r)$ et que f^{-1} est lipschitzienne, donc continue sur $f(D(a, r))$. En particulier f est une application ouverte (l'image de tout ouvert est ouverte).

L'application réciproque est $\mathbb{C}$-dérivable d'après la démonstration classique de la dérivabilité d'une application réciproque, et donc elle est analytique d'après les théorèmes précédents. □

7. Indice d'une courbe et formule de Cauchy généralisée

Définition 9. *Soit γ un chemin fermé, $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$, et un point $a \notin \gamma([\alpha, \beta])$. L'*indice *de γ par rapport à a est*

$$\mathrm{Ind}(\gamma; a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}.$$

Remarque. Dans tout ce qui suit, on peut remplacer le chemin γ par un "cycle", c'est-à-dire une somme de chemins fermés ; les intégrales et donc les indices s'ajoutent, et au lieu de l'image du chemin, $\gamma([\alpha, \beta])$, il faut considérer l'union de d'un nombre fini d'images. On notera cette union d'images $S(\gamma)$ (on parle parfois du support du cycle).

Proposition 10. $\mathrm{Ind}(\gamma; a) \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Il suffit de le montrer pour un seul chemin (une somme d'entiers est entière). Posons

$$\varphi(t) := \int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s) - a}.$$

□

Alors

$$\frac{d}{dt}\left((\gamma(t) - a))\, e^{-\varphi(t)}\right) = e^{-\varphi(t)}\left(\gamma'(t) - (\gamma(t) - a))\, \varphi'(t)\right)$$
$$= e^{-\varphi(t)}\left(\gamma'(t) - (\gamma(t) - a))\, \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}\right) = 0.$$

Donc la fonction qu'on a dérivée est en fait constante, et en particulier

$$(\gamma(1) - a))\, e^{-\varphi(1)} = (\gamma(0) - a))\, e^{-\varphi(0)} = (\gamma(0) - a))\,,$$

et comme $\gamma(0) - a = \gamma(1) - a \neq 0$, on doit avoir $\varphi(1) = 2k\pi i$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, et $\mathrm{Ind}(\gamma; a) = \varphi(1)/2\pi i = k$.

On rappelle que les *composantes connexes* d'un espace topologique sont ses sous-ensembles et maximaux pour l'inclusion. Autrement dit, si X est l'espace et $A \subset X$, alors A est une composante connexe si et seulement si (i) A est connexe et (ii) pour tout ensemble connexe A' tel que $A \subset A'$, alors $A = A'$. Faits : les composantes connexes sont toujours des fermés de X, elles forment une partition de X, et si X est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors ses composantes connexes sont aussi des ouverts (de X, ou $\mathbb{C}$, ce qui est la même chose en l'occurrence).

Lemme 11. *Si $K \subset \mathbb{C}$ est borné, alors $\mathbb{C} \setminus K$ n'admet qu'une seule composante connexe non bornée.*

Démonstration. Soit $R > 0$ tel que $K \subset D(0, R)$, alors $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$ est connexe par arcs (étant donnés deux points z_1, z_2, on peut les relier respectivement à $R\frac{z_1}{|z_1|}$, $R\frac{z_2}{|z_2|}$ par des segments de droite contenus dans les demi-droites $\mathbb{R}_+^* z_j$, $j = 1, 2$, et on peut relier ces deux derniers points par un arc du cercle $C(0, R)$).

Si A est une composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$, alors il existe $z_0 \in A$ tel que $|z_0| > R$, donc $A \cap (\mathbb{C} \setminus D(0, R)) \neq \emptyset$, donc $A \cup (\mathbb{C} \setminus D(0, R))$ est connexe et contenu dans $\mathbb{C} \setminus K$ et contient A, donc $A = A \cup (\mathbb{C} \setminus D(0, R))$, donc $A \supset (\mathbb{C} \setminus D(0, R))$. Si A' est une autre composante connexe non bornée, par le même raisonnement, $A' \supset (\mathbb{C} \setminus D(0, R))$, donc $A \cap A' \neq \emptyset$, donc $A = A'$ puisqu'on a une partition. □

Proposition 12. *En tant que fonction de a (pour un même cycle γ), l'indice est constant sur toute composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$, et égal à 0 quand a appartient à la composante connexe non-bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$.*

Démonstration. L'image d'un connexe par une application continue est connexe. Or les seules parties connexes de $\mathbb{Z}$ sont les singletons, donc une fonction continue à valeurs entières est constante sur un connexe. Il reste à montrer que $a \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma; a)$ est continue. Comme $\gamma([\alpha, \beta])$ est compact, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $|a - \gamma(t)| \geq 2\delta_0$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$. Pour $z \in D(a, \delta_0$, $s \in [\alpha, \beta]$,

$$\left| \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \right| \leq \frac{\sup_{[\alpha,\beta]} |\gamma'(t)|}{\delta_0},$$

et comme l'intervalle d'intégration est de mesure finie, on peut appliquer le théorème de Lebesgue de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre pour conclure.

Dans le cas particulier de la composante connexe non bornée, on peut choisir des points a tels que $|a| > R := \max_{[\alpha,\beta]} |\gamma(t)|$, et

$$\left| \int_\gamma \frac{dz}{z - a} \right| \leq \frac{\ell(\gamma)}{|a| - R} \to 0 \text{ quand } |a| \to +\infty.$$

Donc la valeur constante doit être 0. □

Nous allons maintenant donner une version plus générale de la formule de Cauchy. Quand γ est un cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique, que le disque correspondant est contenu dans l'ouvert où f est analytique, et a un point de ce disque ouvert, on a $\mathrm{Ind}(\gamma; a) = 1$, $\mathrm{Ind}(\gamma; z) = 0$ quand z est en-dehors du disque (et donc en particulier quand $z \notin \Omega$), et on retrouve la formule de Cauchy habituelle.

Théorème 13. *Soit Ω un ouvert, γ un cycle tel que l'image de γ soit contenue dans Ω et tel que pour tout $w \notin \Omega$, $\mathrm{Ind}(\gamma; w) = 0$. Soit f analytique sur Ω. Alors pour tout*

$z \in \Omega \setminus S(\gamma)$,

$$\operatorname{Ind}(\gamma; z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

L'hypothèse sur l'indice de γ par rapport aux points du complémentaire de Ω est très importante. Elle dit (en gros) que γ ne doit pas faire de tours (en somme algébrique) autour des "trous" de Ω. Vous pouvez calculer explicitement l'exemple où $\Omega = \{z : 1 < |z| < 2\}$, $f(z) = 1/z$, et γ est le cercle de rayon $3/2$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique : la conclusion du théorème ne sera pas vérifiée.

Corollaire 14. *(Théorème de Cauchy généralisé).*
Si g est analytique sur Ω, et γ comme dans le théorème, $\int_\gamma g(z) dz = 0$.

En effet, il suffit d'appliquer le théorème à $f(\zeta) := (\zeta - z) g(\zeta)$ et de remarquer que cette définition implique que $f(z) = 0$.

Démonstration du Théorème. Le membre de gauche de l'identité à démontrer est égal à

$$f(z) \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Il suffit donc de prouver

$$\int_\gamma \frac{(f(\zeta) - f(z)) d\zeta}{\zeta - z} = 0. \tag{1}$$

On pose, pour tout $\zeta \in S(\gamma)$ et $z \in \Omega$,

$$g_\zeta(z) = \frac{(f(\zeta) - f(z))}{\zeta - z} \text{ si } z \neq \zeta, \quad g_\zeta(z) = f'(\zeta) \text{ si } z = \zeta.$$

Pour tout ζ, la fonction g_ζ est analytique sur $\Omega \setminus \{\zeta\}$ et continue sur Ω (par dérivabilité de f).

Lemme 15. *Soit g une fonction continue sur Ω et analytique sur $\Omega \setminus P$, où P est un ensemble discret. Alors g est analytique sur tout Ω.*

Admettons le lemme. Alors g_ζ est en fait analytique sur tout Ω.

Soit $G(z) := \int_\gamma g_\zeta(z) d\zeta$. Si on considère un triangle T contenu dans Ω, alors comme g_ζ est localement bornée,

$$\int_T G(z) dz = \int_T \int_\gamma g_\zeta(z) d\zeta dz = \int_\gamma \int_T g_\zeta(z) dz d\zeta = 0,$$

donc le théorème de Morera donne que G est analytique sur Ω.

D'autre part, on pose $U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Ind}(\gamma; z) = 0\}$. C'est donc l'image réciproque de $\{0\}$, qui est un ouvert de $\mathbb{Z}$, par l'application continue $z \mapsto \operatorname{Ind}(\gamma; z)$, donc c'est un ouvert de $\mathbb{C}$. Par hypothèse, $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset U$, c'est-à-dire $\Omega \cup U = \mathbb{C}$. On définit, pour $z \in U$,

$$G_1(z) := \int_\gamma \frac{(f(\zeta)) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Quand $z \in \Omega \cap U$, et donc en particulier $z \notin S(\gamma)$,

$$G(z) = \int_\gamma \frac{(f(\zeta) - f(z)) d\zeta}{\zeta - z} = G_1(z) - 2\pi i f(z) \operatorname{Ind}(\gamma; z) = G_1(z).$$

On peut donc définir une seule fonction analytique sur $\Omega \cup U = \mathbb{C}$, donnée par G sur Ω et par G_1 sur U. On la note à nouveau G.

Finalement, pour $|z| > R := \max_{\zeta \in S(\gamma)} |\zeta|$,

$$|G_1(z)| \leq \max_{\zeta \in S(\gamma)} |f(\zeta)| \frac{\ell(\gamma)}{|z| - R} \to 0 \text{ quand } |a| \to +\infty.$$

Donc G doit être bornée sur $\mathbb{C}$, et d'après le théorème de Liouville, constante ; à cause de la valeur de la limite, cette constante doit être nulle. On a montré la relation (1). $\square$

Démonstration du Lemme. L'analyticité est une propriété locale, on peut donc se restreindre à un disque qui contienne au plus un point $p \in P$. D'après le théorème de Morera, il suffit de montrer que pour tout triangle T contenu dans Ω, $\int_T g(z)dz = 0$. Si $\hat{T}$ ne contient pas p, il n'y a aucun problème. Si $p \in \hat{T}$, et que S_1, S_2, S_3 sont les sommets de T, on peut considérer les trois triangles (éventuellement dégénérés) de sommets $T_1 := (p, S_2, S_3)$, $T_2 := (p, S_3, S_1)$ et $T_3 := (p, S_1, S_2)$ qui sont tous orientés dans le sens trigonométrique. Au sens des chemins (pour l'intégration des formes différentielles) $T = T_1 + T_2 + T_3$ (les six segments qui contiennent p s'annulent deux à deux). Il suffit désormais de travailler sur les triangles T_i : on s'est ramené au cas où p est un sommet du triangle T.

Soit donc un triangle $T = (p, S_2, S_3)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on définit $S'_j := (1 - \varepsilon)p + \varepsilon S_j$, $j = 2, 3$. Soit Q_ε le chemin polygonal de sommets successifs (S'_2, S_2, S_3, S'_3). On a

$$\int_T g(z)dz = \int_{Q_\varepsilon} g(z)dz + \int_{[p,S'_2]} g(z)dz + \int_{[S'_3,p]} g(z)dz - \int_{[S_3,S'_2]} g(z)dz.$$

Les trois segments $[p, S'_2]$, $[S'_3, p]$ et $[S_3, S'_2]$ sont de longueur proportionnelle à ε et contenus dans un disque de rayon $C\varepsilon$ autour de p. Comme g est continue en p, elle est localement bornée, et la somme des modules des trois dernières intégrales est bornée par $C'\varepsilon$. D'autre part, on peut diviser le quadrilatère Q_ε en deux triangles (S'_2, S_2, S_3) et (S'_2, S_3, S'_3), dont aucun ne contient p, donc au total

$$\int_T g(z)dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{Q_\varepsilon} g(z)dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{(S'_2,S_2,S_3)} g(z)dz + \int_{(S'_2,S_3,S'_3)} g(z)dz \right) = 0.$$

Ceci démontre l'analyticité de g. $\square$

8. Singularités isolées, formule de Laurent, formule des résidus généralisée

Désormais, nous noterons $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes (ou analytiques) sur un ouvert Ω.

8.1. **Classification des singularités isolées.**

Définition 16. *On dit qu'une fonction f admet une* singularité isolée *au point a si il existe $r > 0$ tel que f soit analytique sur l'ouvert $D(a, r) \setminus \{a\}$ (disque pointé).*

Remarque : cette définition n'exclut pas le cas où la fonction f n'aurait en fait pas de singularité du tout au point a. Nous allons voir une condition apparemment faible qui implique justement une telle situation.

Théorème 17. *(de la singularité éliminable de Riemann).*

Si f admet une singularité isolée au point a et si $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$, *alors il existe une fonction $\tilde{f}$ analytique sur $D(a,r)$ qui prolonge f (c'est-à-dire que $\tilde{f}(z) = f(z)$ pour tout $z \in D(a,r) \setminus \{a\}$).*

Remarque : l'hypothèse est en un sens minimale, puisque si $f(z) = 1/(z-a)$, alors $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 1$ et on a une vraie singularité. Elle nous montre le fait a priori surprenant suivant : une fonction holomorphe qui tend vers l'infini au voisinage d'un point a doit le faire au moins aussi vite que $1/|z-a|$, et son module ne peut jamais ressembler à $1/\sqrt{|z-a|}$ par exemple.

Démonstration. On pose $g(z) = (z-a)f(z)$ pour $z \neq a$, $g(a) = 0$. Alors g est continue dans un voisinage U de a et holomorphe sur $U \setminus \{a\}$. D'après le Lemme 15, g est holomorphe sur U, et donc analytique. Donc $g(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z-a)^k$, avec $a_0 = 0$ puisque $g(0) = 0$. Donc au voisinage de a, $f(z) = \sum_{k\geq 1} a_k(z-a)^{k-1}$ et si on pose $\tilde{f}(a) = a_1$ et $\tilde{f}(z) = f(z)$ pour $z \neq a$, $\tilde{f}$ est analytique sur un voisinage de a et prolonge f. □

Définition 18. *Si f admet une singularité isolée en a et qu'il existe $r > 0$, un entier naturel $m \in \mathbb{N}^*$ et une fonction g holomorphe sur $D(a,r)$ tels que $g(a) \neq 0$ et $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$, on dit que f admet un* pôle d'ordre m *au point a.*

Proposition 19. *Si f admet une singularité isolée en a, f admet un pôle en a si et seulement si* $\lim_{z\to a}|f(z)| = +\infty$.

Démonstration. Si $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$, la limite est claire.

Réciproquement, si on a $\lim_{z\to a}|f(z)| = +\infty$, alors il existe $r_1 \leq r$ tel que pour $|z-a| < r_1$, $|f(z)| \geq 1$ et donc $1/f(z)$ définit une fonction analytique sur $D(a,r_1)\setminus\{a\}$ (puisque le dénominateur ne s'annule pas). L'hypothèse implique $\lim_{z\to a} 1/f(z) = 0$, donc le théorème de la singularité éliminable de Riemann s'applique et on a une fonction h holomorphe sur $D(a,r_1)$ qui prolonge $1/f$ et s'annule en a. Soit $m \geq 1$ l'ordre d'annulation de h en a : $h(z) = (z-a)^m h_1(z)$, avec $h_1(a) \neq 0$. Donc pour $z \neq a$, $f(z) = \frac{1}{h_1(z)}\frac{1}{(z-a)^m}$ et on peut poser $g(z) = \frac{1}{h_1(z)}$ qui est holomorphe dans un voisinage de a. □

On appelle *singularité essentielle* une singularité isolée qui n'est ni éliminable, ni un pôle.

Exemple : $z \mapsto f(z) = \exp(\frac{1}{z})$. Il est facile de voir que $\lim_{z\to 0, z>0} f(z) = +\infty$ tandis que $\lim_{z\to 0, z>0} f(z) = 0$. On ne peut donc avoir ni une singularité éliminable, ni un pôle.

Théorème 20. *(Casorati-Weierstrass) Si f admet une singularité essentielle en a, alors toute valeur complexe est valeur d'adhérence de f en a, c'est-à-dire que pour tout $w \in \mathbb{C}$, il existe une suite $z_n \to a$ telle que* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$.

La démonstration est laissée en exercice.

8.2. **Séries de Laurent.** Notation : si $a \in \mathbb{C}$ et $0 \leq R_1 \leq R_2 \leq +\infty$, on note $A(a; R_1, R_2) := \{z : R_1 < |z-a| < R_2\}$ (anneau centré en a, éventuellement vide si $R_1 = R_2$). Quand $R_1 = 0$, il s'agit du disque pointé $D(0, R_2) \setminus \{a\}$.

Dans ce qui suit, nous nous contenterons du cas $a = 0$ et noterons simplement $A(0; R_1, R_2) = A(R_1, R_2)$. Il est facile de se ramener à ce cas en faisant le changement de variable $z' = z - a$.

Définition 21. *On appelle* série de Laurent *une série de la forme* $\sum a_k z^k$ *où* $k \in \mathbb{Z}$. *On dit qu'elle converge (simplement, absolument, uniformément, normalement, selon les cas) si et seulement si chacune des deux séries* $\sum_{k\le 0} a_k z^k$ *et* $\sum_{k\ge 0} a_k z^k$ *converge de la même manière.*

Il est facile de voir, en remarquant que $\sum_{k\le 0} a_k z^k = \sum_{k\ge 0} a_{-k} (\frac{1}{z})^k$ et en reprenant les démonstrations sur les séries entières, qu'il existe deux rayons R_1, R_2 avec $0 \le R_1 \le R_2 \le +\infty$ tel que la série de Laurent converge en tout point de $A(R_1, R_2)$, diverge en-dehors de $\overline{A(R_1, R_2)}$, et converge normalement sur tout anneau fermé $\{z : r_1 \le |z - a| \le r_2\}$ tel que $R_1 < r_1 \le r_2 < R_2$.

Nous allons associer un développement en série de Laurent à toute fonction holomorphe sur un anneau.

Théorème 22. *Soit* $f \in \mathcal{H}(A(R_1, R_2))$. *Alors il existe une suite* $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *telle que pour tout* $z \in A(R_1, R_2)$,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k,$$

avec convergence normale sur tout anneau fermé $\{z : r_1 \le |z - a| \le r_2\}$ *tel que* $R_1 < r_1 \le r_2 < R_2$.

De plus, $a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \zeta^{-k-1} f(\zeta) d\zeta$, *pour tout* $r \in]R_1, R_2[$.

Notons que pour $k = -1$, on retrouve $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} f(\zeta) d\zeta = \mathrm{Res}(f, 0)$: le seul terme de la série de Laurent de f qui contribue au résidu de f en 0 est celui de degré -1.

Pour montrer le théorème, nous aurons d'abord besoin de deux résultats auxiliaires.

Lemme 23. *Soit* $g \in \mathcal{H}(A(R_1, R_2))$. *Alors* $r \mapsto \int_{C(0,r)} g(\zeta) d\zeta$ *est constante sur* $]R_1, R_2[$.

Démonstration. Pour $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, considérons le cycle $\gamma := C(0, r_2) - C(0, r_1)$. Pour tout $w \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Ind}(\gamma, w) = \mathrm{Ind}(C(0, r_2), w) - \mathrm{Ind}(C(0, r_1), w)$. Vérifions que l'indice de γ par rapport à tout point du complémentaire de l'anneau est nul. Si $w \notin A(R_1, R_2)$, deux cas sont possibles :

(1) $|w| \ge R_2$. Alors $\mathrm{Ind}(\gamma, w) = 0 - 0 = 0$.

(2) $|w| \le R_1$. Alors $\mathrm{Ind}(\gamma, w) = 1 - 1 = 0$.

Donc nous pouvons appliquer le théorème de Cauchy généralisé :

$$\int_{C(0,r_2)} g(\zeta) d\zeta - \int_{C(0,r_1)} g(\zeta) d\zeta = \int_\gamma g(\zeta) d\zeta = 0.$$

□

Lemme 24. *Soit* $z \in A(R_1, R_2)$ *et* $f \in \mathcal{H}(A(R_1, R_2))$. *On prend* r_1, r_2 *tels que* $R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$. *On pose* $\gamma := C(0, r_2) - C(0, r_1)$. *Alors*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Démonstration. Cette fois-ci, on applique la Formule de Cauchy généralisée avec le cycle γ et la fonction f. On a $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 1 - 0 = 1$, donc il vient bien la formule souhaitée. □

Démonstration du Théorème. On remarque que grâce au lemme précédent, et au fait que $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est holomorphe sur $A(R_1, |z|)$ et sur $A(|z|, R_2)$, les intégrales sur chaque cercle ne dépendent pas de r_1 ou r_2 tant que les inégalités ci-dessus sont respectées.

Pour $z \in A(R_1, R_2)$, on choisit donc n'importe quel $r_1 \in]R_1, |z|[$ et on pose

$$f_1(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta;$$

de même on choisit n'importe quel $r_2 \in]|z|, R_2[$ et on pose

$$f_2(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

On a donc $f = f_2 - f_1$. De plus, pour $|z| < r_2 = |\zeta|$, on peut développer en série

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta(1 - \frac{z}{\zeta})} = \frac{1}{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k,$$

avec convergence normale pour z dans tout disque $\overline{D}(0, r_2')$ pour $r_2' < r_2$, et uniformément en ζ, donc on peut échanger l'intégration et la sommation et on obtient

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_{C(0,r_2)} \zeta^{-k-1} f(\zeta) d\zeta =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

D'autre part, pour $|z| > r_1 = |\zeta|$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z\left(\frac{\zeta}{z} - 1\right)} = -\frac{1}{z} \sum_{k'=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^{k'} = -\sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\zeta^{k'}}{z^{k'+1}},$$

donc en posant $k := -k' - 1 \leq -1$, on trouve $-\sum_{k=-\infty}^{-1} \zeta^{-k-1} z^k$, et à nouveau en échangeant intégration et sommation,

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k \int_{C(0,r_1)} \zeta^{-k-1} f(\zeta) d\zeta := -\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k.$$

Finalement, $f(z) = f_2(z) - f_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$, avec pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \zeta^{-k-1} f(\zeta) d\zeta,$$

comme annoncé. On observe que toute valeur $r \in]R_1, R_2[$ peut désormais être utilisée pour calculer ce coefficient, grâce au Lemme 23. □

8.3. **Démonstration de la formule des résidus.** On rappelle que si A est un sous-ensemble d'un espace métrique X, point $a \in X$ est un point d'accumulation de A si pour tout $r > 0$, il existe $x \in A$ tel que $0 < d(x, a) < r$ (et donc $x \neq a$). Un ensemble sans point d'accumulation dans X sera discret (tous ses points sont isolés) et fermé dans X.

Théorème 25. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $S \subset \Omega$ un ensemble sans point d'accumulation dans Ω, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$, et γ un cycle dans $\Omega \setminus S$ tel que pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\operatorname{Ind}(\gamma; w) = 0$. Alors*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) d\zeta = \sum_{s \in S} \operatorname{Ind}(\gamma; s) \operatorname{Res}(f; s).$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la somme qui figure dans le résultat ne comporte qu'un nombre fini de termes non-nuls. En effet, considérons l'ensemble

$$E := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Ind}(\gamma; z) \neq 0\}.$$

Alors E ne rencontre pas la composante connexe non-bornée de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\gamma$, sur laquelle l'indice vaut 0. Comme cette composante contient $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$ pour un $R > 0$ assez grand, on a $E \subset D(0, R)$, donc E est borné. D'autre part, $E = F^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ où F est l'application continue à valeurs entières donnée par $F(z) = \operatorname{Ind}(\gamma; z)$ sur $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\gamma$. Donc E est fermé dans $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\gamma$, donc l'adhérence de E dans $\mathbb{C}$, $\overline{E} \subset E \cup \operatorname{supp}\gamma$. Or le support du cycle γ est compact, donc borné, donc $E \cup \operatorname{supp}\gamma$ est fermé et borné dans $\mathbb{C}$, donc compact. D'autre part $S \cap E = S \cap (E \cup \operatorname{supp}\gamma)$, puisque S ne rencontre pas $\operatorname{supp}\gamma$ par hypothèse. S étant discret et $E \cup \operatorname{supp}\gamma$ compact, cette intersection est finie : donc les termes non-nuls dans la somme sont en nombre fini.

Pour démontrer la formule, nous allons construire, à partir de γ, un nouveau cycle χ sur lequel nous voudrons appliquer le Théorème de Cauchy dans l'ouvert $\Omega \setminus S$. Il faudra donc avoir $\operatorname{Ind}(\chi; w) = 0$ non seulement pour $w \notin \Omega$, mais aussi pour $w \in S$.

Comme $S \cap E$ est fini, il existe $r > 0$ tel que pour tout $s \in S \cap E$,

(1) $r < \operatorname{dist}(s, \mathbb{C} \setminus \Omega)$;
(2) $r < \operatorname{dist}(s, \operatorname{supp}\gamma)$;
(3) $r < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(s, s')$ pour tout $s' \in S \cap E$, $s' \neq s$.

Alors les disques $\overline{D}(s, r)$ sont disjoints donc aussi les cercles $C(s, r) \subset \Omega \setminus S$, et on peut définir

$$\chi := \gamma - \sum_{s \in S \cap E} \operatorname{Ind}(\gamma; s) C(s, r),$$

où $C(s, r)$ représente le chemin qui parcourt le cercle une fois dans le sens trigonométrique.

Nous posons maintenant $\Omega_1 := \Omega \setminus S$. Alors χ est un cycle dans Ω_1, et pour tout $w \notin \Omega_1$, $\operatorname{Ind}(\chi; w) = 0$. En effet, $\mathbb{C} \setminus \Omega_1 = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup S$. Si $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, par hypothèse $\operatorname{Ind}(\gamma; w) = 0$, et comme $\overline{D}(s, r) \subset \Omega$ pour tout $s \in S$, $\operatorname{Ind}(C(s, r); w) = 0$. D'autre part, si $w \in S$, alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ind}(\chi; w) &= \operatorname{Ind}(\gamma; w) - \sum_{s \in S \cap E} \operatorname{Ind}(\gamma; s) \operatorname{Ind}(C(s, r); w) \\
&= \operatorname{Ind}(\gamma; w) - \operatorname{Ind}(\gamma; w) \operatorname{Ind}(C(w, r); w) - \sum_{s \in S \cap E, s \neq w} \operatorname{Ind}(\gamma; s) \operatorname{Ind}(C(s, r); w) = 0,
\end{aligned}$$

car $\operatorname{Ind}(C(s, r); w) = 0$ pour $s \neq w$ et $\operatorname{Ind}(C(w, r); w) = 1$.

On peut donc appliquer le Théorème de Cauchy généralisé à f holomorphe dans l'ouvert Ω_1 avec le chemin χ : $0 = \int_\chi f(\zeta) d\zeta$, donc

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) d\zeta = \sum_{s \in S \cap E} \operatorname{Ind}(\gamma; s) \frac{1}{2\pi i} \int_{C(s,r)} f(\zeta) d\zeta = \sum_{s \in S \cap E} \operatorname{Ind}(\gamma; s) \operatorname{Res}(f; s),$$

car la fonction f n'admet qu'un seul pôle au centre de chaque cercle. $\square$

8.4. **Principe de l'argument.** L'idée intuitive du résultat qui suit est que le nombre de zéros d'une fonction holomorphe f à l'intérieur d'un contour γ peut être compté, comme dans le cas des zéros de z^n dans le disque unité, en comptant le nombre de "tours" (accroissements de 2π) que fait l'argument de $f(z)$ quand z parcourt γ. Comme l'argument de f est égal à $i \operatorname{Im} \log f$, sa différentielle est $i\frac{df}{f}$, et ce nombre doit valoir $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{df}{f}$.

Définition 26. *Soit $s \in \Omega$, un ouvert de $\mathbb{C}$, et f holomorphe sur $\Omega \setminus \{s\}$. On pose*
— $\mathrm{ord}(f;s) := 0$ *si f se prolonge en s et $f(z) \neq 0$;*
— $\mathrm{ord}(f;s) := m$ *si f se prolonge en s et $f(z) = 0$ avec un zéro de multiplicité m ;*
— $\mathrm{ord}(f;s) := -m$ *si f admet un pôle en s, d'ordre m.*

Remarquez que dans tous les cas, au voisinage de s, $|f(z)|\ c|z-s|^{\mathrm{ord}(f;s)}$, avec $c > 0$.

Théorème 27. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $S \subset \Omega$ un ensemble sans point d'accumulation dans Ω, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$, qui n'admet aux points de S que des pôles ou des singularités éliminables, et qui n'est identiquement nulle sur aucune composante connexe de Ω. Soit γ un cycle dans $\Omega \setminus (S \cup f^{-1}\{0\})$ tel que pour tout $w \notin \Omega$, $\mathrm{Ind}(\gamma; w) = 0$. Alors*
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{s \in S \cup f^{-1}\{0\}} \mathrm{Ind}(\gamma; s)\,\mathrm{ord}(f;s).$$
Cas particulier : si on écrit $Z_f(A)$ pour le nombre de zéros de f dans un ensemble A (comptés avec multiplicités), $P_f(A)$ pour le nombre de pôles de f dans un ensemble A (comptés avec leur ordre), qu'on suppose $\mathrm{Ind}(\gamma; w) = 0$ ou 1 pour tout w (par exemple si γ est une courbe de Jordan parcourue dans le sens trigonométrique), et qu'on pose comme toujours $\hat\gamma := \{w : \mathrm{Ind}(\gamma; w) = 1\} \cup \mathrm{supp}\gamma$, alors
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z_f(\hat\gamma) - P_f(\hat\gamma) :$$
on compte le nombre de zéros moins le nombre de pôles.

Démonstration. L'hypothèse implique que les zéros de f sont isolés, et donc que $S \cup f^{-1}\{0\}$ est discret, et donc les points $s \in S \cup f^{-1}\{0\}$ tels que $\mathrm{Ind}(\gamma; s) \neq 0$ seront en nombre fini, et la somme est finie. On va appliquer la formule des résidus à la fonction $\frac{f'}{f}$, qui est analytique sur l'ouvert $\Omega \setminus (S \cup f^{-1}\{0\})$, avec le cycle γ.

Il faut calculer les résidus de $\frac{f'}{f}$ aux différents points de $S \cup f^{-1}\{0\}$. Si $f(s) = 0$ avec un zéro de multiplicité m, alors il existe une fonction g holomorphe dans un voisinage de s telle que $g(s) \neq 0$ et $f(z) = (z-s)^m g(z)$. Alors
$$f'(z) = m(z-s)^{m-1}g(z) + (z-s)^m g'(z), \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-s} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$
Le deuxième terme est holomorphe au voisinage de s, donc il suffit de calculer le résidu du premier terme, qui vaut m.

De la même façon, si f admet un pôle d'ordre m en s, alors alors il existe une fonction g holomorphe dans un voisinage de s telle que $g(s) \neq 0$ et
$f(z) = (z-s)^{-m}g(z)$. En faisant le même calcul avec m remplacé par $-m$, on voit que

le résidu de $\frac{f'}{f}$ en s vaut $-m$. Dans tous les cas, $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; s\right) = \operatorname{ord}(f; s)$. Le résultat suit d'une application de la formule des résidus. $\square$

On déduit de ce résultat une description utile du comportement local des fonctions holomorphes.

Théorème 28. *Soit f holomorphe au voisinage d'un point z_0, telle que $f - f(z_0)$ admette un zéro d'ordre m (exactement) au point z_0, c'est-à-dire que $f^{(j)}(z_0) = 0$ pour $1 \leq j \leq m-1$ et $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Alors il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que pour tout $w \in D(f(z_0), r_2)$,*

$$\mathit{Card}\{z \in D(z_0, r_1) : f(z) = w\} = m.$$

Corollaire 29. *Si f est holomorphe et injective sur un ouvert Ω, alors $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$.*

En effet, s'il y avait un point z_0 tel que $f'(z_0) = 0$, alors on pourrait appliquer le théorème 28 avec $m \geq 2$, et les valeurs proches de $f(z_0)$ auraient plus d'un antécédent dans un voisinage de z_0, donc f ne serait pas injective.

Corollaire 30. *(Théorème de l'application ouverte). Si f est holomorphe et non constante sur un ouvert connexe Ω, alors l'image de tout ouvert par f est un ouvert.*

En effet, considérons un ouvert $U \subset \Omega$; si $z_0 \in U$, on applique le théorème ci-dessus à l'ouvert U et $D(z_0, r_1) \subset U$ donc $f(U) \supset D(f(z_0), r_2)$, donc tout point $f(z_0)$ de l'ensemble $f(U)$ a un voisinage contenu dans $f(U)$: $f(U)$ est bien un ouvert.

Démonstration du Théorème 28. On commence par réduire le voisinage de z_0 pour s'assurer que si $0 < |z - z_0| < r_1'$, alors $f'(z) \neq 0$: si $f'(z_0) \neq 0$, c'est une conséquence de la continuité de f', sinon on utilise le théorème des zéros isolés appliqués à f', qui n'est pas identiquement nulle, sinon f serait constante dans un voisine de z_0 et ne pourrait pas avoir un zéro d'ordre exactement m. Donc les solutions de l'équation $f(z) = w$ dans le disque $D(z_0, r_1')$, excepté z_0, seront toutes des solutions simples (zéros de multiplicité 1 de la fonction $f - w$) et nous cherchons à calculer $Z_{f-w}(D(z_0, r_1))$ pour un $r_1 \leq r_1'$ bien choisi.

D'après le théorème des zéros isolés appliqué à la fonction $f - f(z_0)$, qui n'est pas identiquement nulle car elle admet un zéro d'ordre exactement m en z_0, il existe $r_1 \leq r_1'$ tel que f ne s'annule pas sur $\overline{D}(z_0, r_1) \setminus \{r_1\}$, et en particulier par compacité

$$0 < \inf_{z \in C(z_0, r_1)} |f(z) - f(z_0)| =: r_2.$$

Pour $w \in D(f(z_0), r_2)$, la fonction $g(z) := f(z) - w$ ne s'annule pas sur le cercle $C(z_0, r_1)$ et le théorème 27 donne

$$Z_g(D(z_0, r_1)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r_1)} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r_1)} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

Ceci est une fonction à valeurs entières de w, continue sur l'ensemble connexe $D(f(z_0), r_2)$, donc constante. On peut l'évaluer pour $w = f(z_0)$: alors la fonction $f - f(z_0)$ possède dans le disque un seul zéro d'ordre m au point z_0, donc le résidu de $\frac{f'}{f - f(z_0)}$ en z_0 vaut m, et donc pour tout $w \in D(f(z_0), r_2)$, $Z_{f-w} = m$. $\square$

Dans le même esprit, on peut utiliser la formule des résidus pour calculer l'inverse local d'une fonction holomorphe quand elle est injective.

Théorème 31. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, injective sur $\overline{D}(a,r)$. Soit $G := f(D(a,r))$. Pour tout $w \in G$, $f^{-1}(w)$ est bien uniquement définie et*

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{zf'(z)}{f(z)-w} dz.$$

Remarque : on pourrait remplacer le cercle par une courbe de Jordan orientée dans le sens trigonométrique, et le disque par l'intérieur de la courbe.

Démonstration. La fonction f étant injective, l'intégrande n'admet qu'un seul pôle, simple, en $z = f^{-1}(w)$. Pour calculer le résidu, on calcule donc

$$\begin{aligned}\lim_{z \to f^{-1}(w)} \frac{zf'(z)(z-f^{-1}(w))}{f(z)-w} &= \lim_{z \to f^{-1}(w)} \frac{(z-f^{-1}(w))}{f(z)-w} \cdot f^{-1}(w) f'(f^{-1}(w)) \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \cdot f^{-1}(w) f'(f^{-1}(w)) = f^{-1}(w).\end{aligned}$$

□

Théorème 32. *(de Rouché) Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $S \subset \Omega$ un ensemble sans point d'accumulation dans Ω, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$, qui n'admet aux points de S que des pôles ou des singularités éliminables. Soit $\gamma \subset \Omega \setminus S$ une courbe de Jordan orientée dans le sens trigonométrique telle que $\hat{\gamma} \subset \Omega$. On suppose que pour tout $z \in \operatorname{supp} \gamma$,*

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|.$$

Alors $Z_f(\hat{\gamma}) - P_f(\hat{\gamma}) = Z_g(\hat{\gamma}) - P_g(\hat{\gamma})$.

Remarques : (1) la plupart du temps, on applique ceci à des fonctions qui n'ont pas de pôles, et donc on compare les nombres de zéros.

(2) L'hypothèse implique en particulier que pour tout $z \in \operatorname{supp} \gamma$, $f(z) \neq 0$ et $g(z) \neq 0$.

Démonstration.

Considérons la fonction $\lambda(z) := f(z)/g(z)$. L'hypothèse équivaut (en appliquant le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) au fait que pour tout $z \in \operatorname{supp} \gamma$, $\lambda(z) \in U := \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. Comme $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \operatorname{supp} \gamma$, λ est définie et continue sur un ouvert Ω_1 avec $\operatorname{supp} \gamma \subset \Omega_1 \subset \Omega$, et comme U est ouvert, $\lambda^{-1}(U)$ est ouvert et $\operatorname{supp} \gamma \subset \lambda^{-1}(U) \subset \Omega_1$.

On peut définir une détermination holomorphe du logarithme complexe sur U, notée Log, avec $\operatorname{Im}(\operatorname{Log} w) \in]0, 2\pi[$ pour $w \in U$. Par un calcul élémentaire,

$$(L \circ \lambda)' = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g},$$

donc

$$\begin{aligned}&(Z_f(\hat{\gamma}) - P_f(\hat{\gamma})) - (Z_g(\hat{\gamma}) - P_g(\hat{\gamma})) \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (L \circ \lambda)'(z) dz = 0.\end{aligned}$$

□

Voici une conséquence du Théorème de Rouché qui est légèrement plus faible, mais souvent plus facile à appliquer :

Corollaire 33. *Avec les mêmes hypothèses que dans le Théorème 32, si on suppose que* $|f(z)| < |g(z)|$ *pour tout* $z \in \operatorname{supp} \gamma$*, alors* $Z_f(\hat{\gamma}) - P_f(\hat{\gamma}) = Z_g(\hat{\gamma}) - P_g(\hat{\gamma})$.

En effet, si on pose $g_1 = g$, $f_1 = f - g$, alors
$|f_1(z) + g_1(z)| = |f(z)| < |g(z)| = |g_1(z)| \leq |f_1(z)| + |g_1(z)|$.

9. Domaines simplement connexes.

Dorénavant, nous appellerons *domaine* un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

Proposition 34. *Tout ouvert connexe* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *est connexe par lignes brisées, c'est-à-dire que pour tous* $a, b \in \Omega$ *il existe un chemin* γ *composé d'un ensemble fini de segments de droites tel que* $\gamma(0) = a$ *et* $\gamma(1) = b$.

En particulier, tout ouvert connexe de $\mathbb{C}$ est connexe par arcs.

Démonstration. Exercice pour le lecteur : considérer l'ensemble A des points $x \in Omega$ tel qu'il existe une ligne brisée reliant a à x. Il est non vide, car $a \in A$, il est fermé car si $A \ni x_n \to x$, avec $x \in \Omega$, il existe un disque $D(x, r) \subset \Omega$ et pour n assez grand $x_n \in D(x, r)$. Il est ouvert, car si $x \in A$ il existe un disque $D(x, r) \subset \Omega$ et on peut tracer un segment de plus de x à tout point de $D(x, r)$. □

Définition 35. *Soient* $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \Omega$ *deux courbes qui aient les mêmes extrémités, c'est-à-dire que* $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ *et* $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$*. On dit que* γ_0 *et* γ_1 *sont* homotopes *(avec extrémités fixes) si il existe une application continue*

$$\begin{aligned} H : \quad & [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Omega \\ \textit{telle que} \quad & H(0,t) = \gamma_0(t), \quad H(1,t) = \gamma_1(t), 0 \leq t \leq 1 \\ \textit{et} \quad & H(\theta,0) = \gamma_0(0), \quad H(\theta,1) = \gamma_0(1), 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned}$$

H est appelée homotopie *entre les deux courbes.*

Intuitivement, nous avons une famille de courbes $t \mapsto \gamma_\theta(t) := H(\theta, t)$ qui permet de varier continument de γ_0 à γ_1. On peut voir ceci comme une propriété de connexité par arcs d'un espace de courbes. Attention, nous voulons que cette notion soit invariante par homéomorphisme (bijection bicontinue) et nous avons donc seulement supposé H continue. Même quand γ_0 et γ_1 sont des chemins $\mathcal{C}^1$ par morceaux, les courbes intermédiaires γ_θ peuvent être très irrégulières.

Théorème 36. *Si* γ_0, γ_1 *sont des chemins dans* Ω *qui sont homotopes (avec extrémités fixes), et que* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*, alors*

$$\int_{\gamma_0} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta.$$

Définition 37. *Un domaine* Ω *est dit* simplement connexe *si deux courbes dans* Ω *qui ont les mêmes extrémités sont toujours homotopes.*

Exemples.

(1) Tout domaine convexe est simplement connexe.

En effet, si on se donne deux courbes γ_0, γ_1, il suffit d'écrire $H(\theta, t) = (1 - \theta)\gamma_0(t) + \theta\gamma_1(t)$, qui est un point de Ω par convexité.

(2) Tout domaine étoilé est simplement connexe.

On dit qu'un domaine Ω est *étoilé* si il existe $z_0 \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$, le segment $[z_0; z] \subset \Omega$. Par exemple, $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ est étoilé en prenant $z_0 = 1$.

La démonstration est plus compliquée et nous ne la donnerons pas ici.

(3) Il noter enfin que tout domaine homéomorphe à un domaine simplement connexe est lui aussi simplement connexe. La démonstration est facile en composant par l'homéomorphisme et son inverse.

Corollaire 38. *Si Ω est un domaine simplement connexe, toute $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ admet une primitive.*

En effet, tout chemin fermé γ quelconque est homotope au chemin constant égal à $\gamma(0)$. D'après le Théorème 36, $\int_\gamma f = \int_{\gamma(0)} f = 0$, et la Proposition 3 montre que f admet une primitive.

Démonstration du Théorème 36. Soit H une homotopie entre γ_0 et γ_1, comme dans la Définition 37. Comme $[0,1] \times [0,1]$ est compact, son image l'est aussi, et $\delta :=$ dist $(H([0,1] \times [0,1]), \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$. Par le Théorème de Heine, H est uniformément continue, donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\max\left(|\theta - \theta'|, |t - t'|\right) \leq \frac{1}{N} \Rightarrow |H(\theta, t) - H(\theta', t')| < \delta.$$

Nous notons $\tilde{\gamma}_\theta$ le chemin en ligne brisée de sommets $H(\theta, \frac{j}{N})$, $0 \leq j \leq N$, parametré par $0 \leq t \leq 1$, de telle manière que $\tilde{\gamma}_\theta(\frac{j}{N}) = H(\theta, \frac{j}{N})$. En particulier, si $\theta = 0$ or 1, alors $\hat{\gamma}_\theta(\frac{j}{N}) = \gamma_\theta(\frac{j}{N})$, $0 \leq j \leq N$. Nous avons donc construit, pour chacun des deux chemins de départ, une approximation par une ligne brisée ; et $N - 1$ ligne brisées intermédiaires pour $\theta = \frac{k}{N}$, $1 \leq k \leq N - 1$.

Lemme 39. *Pour $\theta = 0$ ou 1,*

$$\int_{\tilde{\gamma}_\theta} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_\theta} f(\zeta) d\zeta.$$

Démonstration. Il suffira de montrer que pour $0 \leq j \leq N - 1$,

$$\int_{\tilde{\gamma}_\theta|_{[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}]}} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_\theta|_{[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}]}} f(\zeta) d\zeta.$$

Le chemin fermé $\tilde{\gamma}_\theta|_{[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}]} - \gamma_\theta|_{[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}]}$ est contenu dans le disque $D(\gamma_\theta(\frac{j}{N}), \delta)$ qui est inclus dans Ω grâce à notre choix de δ. Sur un disque, en raison par exemple du Théorème 4, f admet une primitive, donc son intégrale sur un chemin fermé doit être nulle. □

Il suffira désormais de montrer que

$$\int_{\tilde{\gamma}_0} f(\zeta) d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}_1} f(\zeta) d\zeta,$$

et par une récurrence immédiate, ceci se ramène à montrer que pour $0 \leq k \leq N - 1$,

$$\int_{\tilde{\gamma}_{\frac{k}{N}}} f(\zeta) d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}_{\frac{k+1}{N}}} f(\zeta) d\zeta. \tag{2}$$

Pour arriver à démontrer ceci, nous allons montrer par récurrence sur j, for $0 \le j \le N-1$, that

$$\int_{\tilde\gamma_{\frac{k}{N}}|_{[0,\frac{j}{N}]}} f(\zeta)d\zeta + \int_{\left[\gamma_{\frac{k}{N}}(\frac{j}{N}),\gamma_{\frac{k+1}{N}}(\frac{j}{N})\right]} f(\zeta)d\zeta = \int_{\tilde\gamma_{\frac{k+1}{N}}|_{[0,\frac{j}{N}]}} f(\zeta)d\zeta. \tag{3}$$

Supposons la propriété démontrée au rang j. Pour simplifier les notations, soient

$$A := \tilde\gamma_{\frac{k}{N}}(\frac{j}{N}), \quad B := \tilde\gamma_{\frac{k}{N}}(\frac{j+1}{N}), \quad C := \tilde\gamma_{\frac{k+1}{N}}(\frac{j+1}{N}), \quad D := \tilde\gamma_{\frac{k+1}{N}}(\frac{j}{N}).$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{\tilde\gamma_{\frac{k+1}{N}}|_{[0,\frac{j+1}{N}]}} f(\zeta)d\zeta &= \int_{\tilde\gamma_{\frac{k+1}{N}}|_{[0,\frac{j}{N}]}} f(\zeta)d\zeta + \int_{[D,C]} f(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{\tilde\gamma_{\frac{k}{N}}|_{[0,\frac{j}{N}]}} f(\zeta)d\zeta + \int_{[A,D]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[D,C]} f(\zeta)d\zeta,\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence (3). Le quadrilatère (A,B,C,D) et son intérieur sont contenus dans le disque $D(A,\delta) \subset \Omega$, donc en utilisant encore le fait que toute fonction holomorphe admet une primitive sur un disque, et donc que les intégrales de chemin sur ce disque ne dépendent que de f et des extrémités du chemin,

$$\int_{[A,D]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[D,C]} f(\zeta)d\zeta = \int_{[A,B]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[B,C]} f(\zeta)d\zeta.$$

Finalement

$$\begin{aligned}\int_{\tilde\gamma_{\frac{k+1}{N}}|_{[0,\frac{j+1}{N}]}} f(\zeta)d\zeta &= \int_{\tilde\gamma_{\frac{k}{N}}|_{[0,\frac{j}{N}]}} f(\zeta)d\zeta + \int_{[A,B]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[B,C]} f(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{\tilde\gamma_{\frac{k}{N}}|_{[0,\frac{j+1}{N}]}} f(\zeta)d\zeta + \int_{\left[\tilde\gamma_{\frac{k}{N}}(\frac{j+1}{N}),\tilde\gamma_{\frac{k+1}{N}}(\frac{j+1}{N})\right]} f(\zeta)d\zeta.\end{aligned}$$

La propriété (3) est établie au rang $j+1$, donc partout, donc appliquons-la avec $j = N$. Alors comme l'homotopie fixe les extrémités, $\tilde\gamma_{\frac{k}{N}}(1) = \tilde\gamma_{\frac{k+1}{N}}(1)$, donc le terme $\int_{\left[\gamma_{\frac{k}{N}}(\frac{j}{N}),\gamma_{\frac{k+1}{N}}(\frac{j}{N})\right]} f(\zeta)d\zeta$ disparaît et nous avons prouvé que quand on intègre sur tout l'intervalle $[0,1]$, (2) est vérifiée. □

Définition 40. *On appelle* sphère de Riemann *et on note* $\hat{\mathbb{C}}$ *l'ensemble* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$*, muni de la topologie suivante : pour un point de* $\mathbb{C}$*, une base de voisinages est donnée par ses voisinages dans la topologie usuelle de* $\mathbb{C}$*, et une base de voisinages de* ∞ *est donnée par les ensembles* $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}$.

Exercice : $\hat{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. On peut le voir en utilisant la projection stéréographique du plan sur la sphère : soit $N = (0,0,1)$ le "pôle Nord" de la sphère unité ; à tout point A du plan $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$, on associe l'intersection de la droite (AN) avec la sphère privée de N, $S\setminus\{N\} := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, z \neq 1\}$.

Proposition 41. *Si* Ω *est tel que* $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ *est connexe, alors toute* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *admet une primitive.*

Remarque : si $F := \mathbb{C} \setminus \Omega$ est connexe et non-borné, alors $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega = F \cup \{\infty\}$ est connexe aussi : en effet il existe une suite $(z_n) \subset F$ telle que $|z_n| \to +\infty$, donc $\infty \in \overline{F}$ (adhérence dans $\hat{\mathbb{C}}$), et donc $F \cup \{\infty\}$ est connexe.

Par contre, si $F := \mathbb{C} \setminus \Omega$ est contenu dans $D(0,R)$ pour un certain $R > 0$ et non vide, alors $D(0,R)$ et $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}$ sont deux ouverts disjoints de $\hat{\mathbb{C}}$ qui recouvrent $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, qui n'est donc pas connexe.

D'autre part, $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ peut être connexe et $\mathbb{C} \setminus \Omega$ non-connexe : on peut prendre par exemple $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi\}$ (détails laissés au lecteur).

Démonstration de la Proposition 41. Soit γ un cycle dans Ω. Alors $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \gamma$ est un ouvert, qui se décompose en composantes connexes U_i qui sont ouvertes (parce que si $a \in U_i$, il existe un disque $D(a,r) \subset \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \gamma$ et $U_i \cup D(a,r)$ devra être connexe comme union de deux connexes dont l'intersection est non-vide, donc $U_i \cup D(a,r) \subset U_i$ par maximalité de la composante connexe, donc $D(a,r) \subset U_i$, donc U_i est bien voisinage de chacun de ses points).

Soit U_∞ l'unique composante connexe non-bornée de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \gamma$, qui contient $\mathbb{C} \setminus D(0,R)$ pour un certain R assez grand, et $U_0 := \bigcup_{i \neq \infty} U_i$ qui est un ouvert de $\mathbb{C}$, borné. Comme $\infty \in \overline{U}_\infty$, $\hat{U}_\infty := U_\infty \cup \{\infty\}$ est un connexe, et comme U_∞ contient $\mathbb{C} \setminus D(0,R)$, $U_\infty \cup \{\infty\}$ est un voisinage de ∞, donc finalement est un ouvert de $\hat{\mathbb{C}}$, connexe.

Donc $\hat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{supp} \gamma = \hat{U}_\infty \cup U_0$, union de deux ouverts disjoints. D'autre part $\hat{U}_\infty \cup \left(\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega\right)$ est connexe comme union de deux connexes d'intersection non vide (ils ont au moins le point ∞ en commun), et ne rencontre pas $\operatorname{supp} \gamma$ puisque $\operatorname{supp} \gamma \subset \Omega$. Donc il est contenu dans une composante connexe de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{supp} \gamma$, donc contenu dans $\hat{U}_\infty$. Finalement, tout point $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ est dans U_∞, et par conséquent $\operatorname{Ind}(\gamma; w) = 0$: on peut appliquer le Théorème de Cauchy généralisé et on voit que pour tout cycle γ contenu dans Ω, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\int_\gamma f = 0$, ce qui montre qu'on peut trouver une primitive. $\square$

La propriété de simple connexité d'un ouvert $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ est en fait équivalente à plusieurs autres propriétés. Dans le théorème qui suit, l'équivalence entre simple connexité et bijection avec le disque est connue sous le nom de Theorème de l'Application Conforme de Riemann.

Théorème 42. *Soit $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ un domaine. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe une bijection holomorphe entre Ω et $D(0,1)$.
(2) Ω est simplement connexe.
(3) $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ est connexe.
(4) Toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ admet une primitive.
(5) Toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$ admet un logarithme holomorphe.
(6) Toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$ admet une racine carrée holomorphe.

L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) suit du fait que $D(0,1)$ est convexe et que toute bijection holomorphe ayant un inverse holomorphe, donc continu, alors c'est un homéomorphisme.

L'implication (2) $\Rightarrow$ (3) peut se démontrer par contraposée : si $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ n'est pas connexe, on peut construire un chemin fermé tel que son indice par rapport aux points d'une partie bornée de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ soit non-nul, et donc qui ne soit par homotope à une constante **(admis)**.

L'implication (3) $\Rightarrow$ (4) est la Proposition 41.

L'implication (4) $\Rightarrow$ (5) se démontre en prenant $L(z)$ une primitive de $f'(z)/f(z)$, car alors

$$\frac{d}{dz}\left(f(z)\exp(-L(z))\right) = \left(f'(z) - L'(z)f(z)\right)\exp(-L(z)) = 0,$$

et en ajoutant si besoin est une constante à L, on obtient $f(z)\exp(-L(z)) \equiv 1$.

L'implication (5) $\Rightarrow$ (6) se démontre en posant $f(z)^{1/2} = \exp(\frac{1}{2}L(z))$, si L est un logarithme de f.

L'implication (6) $\Rightarrow$ (1) est difficile, et constitue l'essentiel du Théorème de Riemann ; l'application est construite dans l'esprit du cas d'égalité du Lemme de Schwarz, en montrant qu'on peut trouver une suite d'applications qui maximisent le module d'une certaine dérivée, et que sa limite existe et est bijective **(admis)**.