

**ANALYSE COMPLEXE 2, PARCOURS SPÉCIAL L3
MATHÉMATIQUES
RÉSUMÉ DE COURS**

PASCAL J. THOMAS

Pré-requis : analyse complexe 1.

5. PRINCIPE DU MODULE MAXIMUM

Théorème 1. *Soit Ω un ouvert connexe, f analytique sur Ω , alors si $|f|$ admet un maximum local, la fonction f est constante.*

Remarque. On a démontré au passage que la même propriété est vérifiée par $\operatorname{Re} f$.

Corollaire 2. *Si Ω est un ouvert connexe borné, que f est analytique sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$, alors il existe $z_0 \in \partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$ tel que $|f(z_0)| = \max_{\overline{\Omega}} |f|$.*

Remarque. En fait, dans le corollaire, l'hypothèse de connexité de Ω n'est pas nécessaire : on peut travailler sur chaque composante connexe de Ω .

6. ÉQUIVALENCE ENTRE \mathbb{C} -DÉRIVABILITÉ ET ANALYTICITÉ

6.1. \mathbb{C} -dérivabilité et \mathbb{R} -différentiabilité. On sait qu'une fonction $f : U \rightarrow F$, où E, F sont des \mathbb{K} -espace vectoriels normés et $U \subset E$ un ouvert, est différentiable au point $a \in U$ ssi il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h),$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \|h\|^{-1}o(h) = 0$. On note souvent $L(h) = Df(a)(h)$, ou en coordonnées a $Df(a)(h) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j$. En notant dx_j la forme linéaire qui à un vecteur x associe la coordonnée x_j , on obtient la formulation équivalente (interprétée en physique en termes de "petits accroissements") :

$$df := Df(a) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)dx_j.$$

Quand $E = F = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on retrouve la définition de la dérivabilité au sens complexe. Quand on a toujours $E = F = \mathbb{C}$ mais $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, comme $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, on a deux dérivées partielles, notées $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$. Si on note $dz := dx + idy$, $d\bar{z} := dx - idy$, on voit après résolution d'un système d'équations très simple que :

$$\begin{aligned} Df(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) d\bar{z} =: \frac{\partial f}{\partial z}(a)dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)d\bar{z} \end{aligned}$$

La fonction f sera dérivable au sens complexe au point a si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$.

6.2. Notations pour les intégrales de chemins. Si on a deux chemins γ_1, γ_2 définis respectivement sur $[a, b]$ et $[b, c]$, avec $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, leur *concaténation* est notée $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$, car $\int_\gamma \varphi = \int_{\gamma_1} \varphi + \int_{\gamma_2} \varphi$.

De même le chemin correspondant à γ parcouru dans le sens inverse est noté $-\gamma$.

6.3. Existence de primitives. Nous avons vu dans la première partie du cours qu'une fonction holomorphe *et* de classe \mathcal{C}^1 sera analytique. Nous nous intéressons à l'existence de primitives parce que si f est seulement holomorphe mais que de plus $f(z) = F'(z)$, alors F est holomorphe par construction, et de classe \mathcal{C}^1 puisque f , étant dérivable, doit être continue, et donc F est analytique, et donc $f = F'$ est analytique, cqfd.

Nous avons déjà vu que si $f(z) = F'(z)$, où γ est paramétrée par un intervalle $[a; b]$, alors $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. La réciproque est vraie.

Proposition 3. *Soit Ω un ouvert connexe, $z_0 \in \Omega$. Soit f une fonction continue de Ω dans \mathbb{C} .*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) *Il existe une unique fonction F telle que $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$ et $F(z_0) = 0$.*
- (2) *Pour tout chemin fermé γ dans Ω , $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0$.*
- (3) *Pour tous chemins γ_1, γ_2 de $[0; 1]$ dans Ω tels que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, alors $\int_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_2} f(\zeta)d\zeta$.*

Nous pouvons donner maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 4. *Soit Ω un ouvert convexe et f une fonction holomorphe (\mathbb{C} -dérivable) en tout point de Ω . Alors f admet une primitive sur Ω .*

Corollaire 5. *Soit Ω un ouvert (quelconque) et f une fonction holomorphe (\mathbb{C} -dérivable) en tout point de Ω . Alors f est analytique sur Ω .*

Démonstration 2. Considérons un disque $D(a, r) \subset \Omega$. Alors l'intégrale de f sur tout chemin de Jordan contenu dans $D(a, r)$ sera nulle, puisque f admet une primitive. C'est la conclusion du Théorème de Cauchy (théorème 26 du cours d'Analyse Complexe 1), que nous obtenons ainsi en évitant d'utiliser la formule de Green-Riemann. On en déduit la formule de Cauchy, et à nouveau le fait que f est développable en série entière. \square

Le Théorème 4 découle de la proposition suivante :

Proposition 6. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω qui contient le triangle fermé T (son intérieur, et sa frontière). Alors*

$$\int_{\partial T} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

Ici ∂T désigne le chemin polygonal fermé obtenu par concaténation des trois segments qui sont les côtés du triangle, orientés pour qu'il soient parcourus dans le sens trigonométrique.

Les démonstrations des propositions ci-dessus impliquent une caractérisation des fonctions holomorphes/analytiques qui peut être assez commode.

Théorème 7. (Théorème de Morera) Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω . Alors f est analytique dans Ω si et seulement si pour tout triangle T contenu dans Ω tel que $\hat{T} \subset \Omega$, on a $\int_T f(z)dz = 0$.

Théorème 8. Soit f holomorphe au voisinage d'un point a , avec $f'(a) \neq 0$. Alors il existe un voisinage U de a telle que f soit bijective sur U sur $f(U)$, $f(U)$ ouvert, et que la fonction réciproque g soit analytique de $f(U)$ dans U .

7. INDICE D'UNE COURBE ET FORMULE DE CAUCHY GÉNÉRALISÉE

Définition 9. Soit γ un chemin fermé, $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$, et un point $a \notin \gamma([\alpha, \beta])$. L'indice de γ par rapport à a est

$$\text{Ind}(\gamma; a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}.$$

Remarque. Dans tout ce qui suit, on peut remplacer le chemin γ par un "cycle", c'est-à-dire une somme de chemins fermés ; les intégrales et donc les indices s'ajoutent, et au lieu de l'image du chemin, $\gamma([\alpha, \beta])$, il faut considérer l'union de d'un nombre fini d'images. On notera cette union d'images $S(\gamma)$ (on parle parfois du support du cycle).

Proposition 10. $\text{Ind}(\gamma; a) \in \mathbb{Z}$.

On rappelle que les *composantes connexes* d'un espace topologique sont ses sous-ensembles et maximaux pour l'inclusion. Autrement dit, si X est l'espace et $A \subset X$, alors A est une composante connexe si et seulement si (i) A est connexe et (ii) pour tout ensemble connexe A' tel que $A \subset A'$, alors $A = A'$. Faits : les composantes connexes sont toujours des fermés de X , elles forment une partition de X , et si X est un ouvert de \mathbb{C} , alors ses composantes connexes sont aussi des ouverts (de X , ou \mathbb{C} , ce qui est la même chose en l'occurrence).

Lemme 11. Si $K \subset \mathbb{C}$ est borné, alors $\mathbb{C} \setminus K$ n'admet qu'une seule composante connexe non bornée.

Proposition 12. En tant que fonction de a (pour un même cycle γ), l'indice est constant sur toute composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$, et égal à 0 quand a appartient à la composante connexe non-bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$.

Nous allons maintenant donner une version plus générale de la formule de Cauchy. Quand γ est un cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique, que le disque correspondant est contenu dans l'ouvert où f est analytique, et a un point de ce disque ouvert, on a $\text{Ind}(\gamma; a) = 1$, $\text{Ind}(\gamma; z) = 0$ quand z est en-dehors du disque (et donc en particulier quand $z \notin \Omega$), et on retrouve la formule de Cauchy habituelle.

Théorème 13. Soit Ω un ouvert, γ un cycle tel que l'image de γ soit contenue dans Ω et tel que pour tout $w \notin \Omega$, $\text{Ind}(\gamma; w) = 0$. Soit f analytique sur Ω . Alors pour tout $z \in \Omega \setminus S(\gamma)$,

$$\text{Ind}(\gamma; z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

L'hypothèse sur l'indice de γ par rapport aux points du complémentaire de Ω est très importante. Elle dit (en gros) que γ ne doit pas faire de tours (en somme algébrique) autour des "trous" de Ω .

Corollaire 14. (*Théorème de Cauchy généralisé*).

Si g est analytique sur Ω , et γ comme dans le théorème, $\int_{\gamma} g(z)dz = 0$.

En effet, il suffit d'appliquer le théorème à $f(\zeta) := (\zeta - z)g(\zeta)$ et de remarquer que cette définition implique que $f(z) = 0$.

8. SINGULARITÉS ISOLÉES, FORMULE DE LAURENT, FORMULE DES RÉSIDUS GÉNÉRALISÉE

Désormais, nous noterons $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes (ou analytiques) sur un ouvert Ω .

8.1. Classification des singularités isolées.

Définition 15. *On dit qu'une fonction f admet une singularité isolée au point a si il existe $r > 0$ tel que f soit analytique sur l'ouvert $D(a, r) \setminus \{a\}$ (disque pointé).*

Remarque : cette définition n'exclut pas le cas où la fonction f n'aurait en fait pas de singularité du tout au point a . Nous allons voir une condition apparemment faible qui implique justement une telle situation.

Théorème 16. (*de la singularité éliminable de Riemann*).

Si f admet une singularité isolée au point a et si $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$, alors il existe une fonction \tilde{f} analytique sur $D(a, r)$ qui prolonge f (c'est-à-dire que $\tilde{f}(z) = f(z)$ pour tout $z \in D(a, r) \setminus \{a\}$).

Remarque : l'hypothèse est en un sens minimale, puisque si $f(z) = 1/(z - a)$, alors $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 1$ et on a une vraie singularité. Elle nous montre le fait a priori surprenant suivant : une fonction holomorphe qui tend vers l'infini au voisinage d'un point a doit le faire au moins aussi vite que $1/|z - a|$, et son module ne peut jamais ressembler à $1/\sqrt{|z - a|}$ par exemple.

Définition 17. *Si f admet une singularité isolée en a et qu'il existe $r > 0$, un entier naturel $m \in \mathbb{N}^*$ et une fonction g holomorphe sur $D(a, r)$ tels que $g(a) \neq 0$ et $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$, on dit que f admet un pôle d'ordre m au point a .*

Proposition 18. *Si f admet une singularité isolée en a , f admet un pôle en a si et seulement si $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$.*

On appelle *singularité essentielle* une singularité isolée qui n'est ni éliminable, ni un pôle.

Exemple : $z \mapsto f(z) = \exp(\frac{1}{z})$.

Théorème 19. (*Casorati-Weierstrass*) *Si f admet une singularité essentielle en a , alors toute valeur complexe est valeur d'adhérence de f en a , c'est-à-dire que pour tout $w \in \mathbb{C}$, il existe une suite $z_n \rightarrow a$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$.*

La démonstration est laissée en exercice.

8.2. Séries de Laurent. Notation : si $a \in \mathbb{C}$ et $0 \leq R_1 \leq R_2 \leq +\infty$, on note $A(a; R_1, R_2) := \{z : R_1 < |z - a| < R_2\}$ (anneau centré en a , éventuellement vide si $R_1 = R_2$). Quand $R_1 = 0$, il s'agit du disque pointé $D(0, R_2) \setminus \{a\}$.

Dans ce qui suit, nous nous contenterons du cas $a = 0$ et noterons simplement $A(0; R_1, R_2) = A(R_1, R_2)$.

Définition 20. On appelle série de Laurent une série de la forme $\sum a_k z^k$ où $k \in \mathbb{Z}$. On dit qu'elle converge (simplement, absolument, uniformément, normalement, selon les cas) si et seulement si chacune des deux séries $\sum_{k \leq 0} a_k z^k$ et $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ converge de la même manière.

Il est facile de voir qu'il existe deux rayons R_1, R_2 avec $0 \leq R_1 \leq R_2 \leq +\infty$ tel que la série de Laurent converge en tout point de $A(R_1, R_2)$, diverge en-dehors de $\overline{A(R_1, R_2)}$, et converge normalement sur tout anneau fermé $\{z : r_1 \leq |z - a| \leq r_2\}$ tel que $R_1 < r_1 \leq r_2 < R_2$.

Théorème 21. Soit $f \in \mathcal{H}(A(R_1, R_2))$. Alors il existe une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $z \in A(R_1, R_2)$,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k,$$

avec convergence normale sur tout anneau fermé $\{z : r_1 \leq |z - a| \leq r_2\}$ tel que $R_1 < r_1 \leq r_2 < R_2$.

De plus, $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \zeta^{-k-1} f(\zeta) d\zeta$, pour tout $r \in]R_1, R_2[$.

Notons que pour $k = -1$, on retrouve $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} f(\zeta) d\zeta = \text{Res}(f, 0)$: le seul terme de la série de Laurent de f qui contribue au résidu de f en 0 est celui de degré -1 .

Pour montrer le théorème, nous aurons d'abord besoin de deux résultats auxiliaires.

Lemme 22. Soit $g \in \mathcal{H}(A(R_1, R_2))$. Alors $r \mapsto \int_{C(0,r)} g(\zeta) d\zeta$ est constante sur $]R_1, R_2[$.

Lemme 23. Soit $z \in A(R_1, R_2)$ et $f \in \mathcal{H}(A(R_1, R_2))$. On prend r_1, r_2 tels que $R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$. On pose $\gamma := C(0, r_2) - C(0, r_1)$. Alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

8.3. Démonstration de la formule des résidus. On rappelle que si A est un sous-ensemble d'un espace métrique X , point $a \in X$ est un point d'accumulation de A si pour tout $r > 0$, il existe $x \in A$ tel que $0 < d(x, a) < r$ (et donc $x \neq a$). Un ensemble sans point d'accumulation dans X sera discret (tous ses points sont isolés) et fermé dans X .

Théorème 24. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , $S \subset \Omega$ un ensemble sans point d'accumulation dans Ω , $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$, et γ un cycle dans $\Omega \setminus S$ tel que pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\text{Ind}(\gamma; w) = 0$. Alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{s \in S} \text{Ind}(\gamma; s) \text{Res}(f; s).$$

8.4. Principe de l'argument. L'idée intuitive du résultat qui suit est que le nombre de zéros d'une fonction holomorphe f à l'intérieur d'un contour γ peut être compté, comme dans le cas des zéros de z^n dans le disque unité, en comptant le nombre de "tours" (accroissements de 2π) que fait l'argument de $f(z)$ quand z parcourt γ . L'argument de f est égal à $\text{Im} \log f$. D'autre part, $d(\text{Re} \log f) = d \log |f|$ donc c'est une différentielle totale. Donc

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d(\log f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} id(\text{Im} \log f),$$

qui est bien l'accroissement de l'argument divisé par 2π .

Définition 25. Soit $s \in \Omega$, un ouvert de \mathbb{C} , et f holomorphe sur $\Omega \setminus \{s\}$. On pose

- $\text{ord}(f; s) := 0$ si f se prolonge en s et $f(z) \neq 0$;
- $\text{ord}(f; s) := m$ si f se prolonge en s et $f(z) = 0$ avec un zéro de multiplicité m ;
- $\text{ord}(f; s) := -m$ si f admet un pôle en s , d'ordre m .

Remarquez que dans tous les cas, au voisinage de s , $|f(z)| \sim c|z - s|^{\text{ord}(f; s)}$, avec $c > 0$.

Théorème 26. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , $S \subset \Omega$ un ensemble sans point d'accumulation dans Ω , $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$, qui n'admet aux points de S que des pôles ou des singularités éliminables, et qui n'est identiquement nulle sur aucune composante connexe de Ω . Soit γ un cycle dans $\Omega \setminus (S \cup f^{-1}\{0\})$ tel que pour tout $w \notin \Omega$, $\text{Ind}(\gamma; w) = 0$. Alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{s \in S \cup f^{-1}\{0\}} \text{Ind}(\gamma; s) \text{ord}(f; s).$$

Cas particulier : si on écrit $Z_f(A)$ pour le nombre de zéros de f dans un ensemble A (comptés avec multiplicités), $P_f(A)$ pour le nombre de pôles de f dans un ensemble A (comptés avec leur ordre), qu'on suppose $\text{Ind}(\gamma; w) = 0$ ou 1 pour tout w (par exemple si γ est une courbe de Jordan parcourue dans le sens trigonométrique), et qu'on pose comme toujours $\hat{\gamma} := \{w : \text{Ind}(\gamma; w) = 1\} \cup \text{supp} \gamma$, alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f(\hat{\gamma}) - P_f(\hat{\gamma}) :$$

on compte le nombre de zéros moins le nombre de pôles.

On déduit de ce résultat une description utile du comportement local des fonctions holomorphes.

Théorème 27. Soit f holomorphe au voisinage d'un point z_0 , telle que $f - f(z_0)$ admette un zéro d'ordre m (exactement) au point z_0 , c'est-à-dire que $f^{(j)}(z_0) = 0$ pour $1 \leq j \leq m - 1$ et $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Alors il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que pour tout $w \in D(f(z_0), r_2)$,

$$\text{Card}\{z \in D(z_0, r_1) : f(z) = w\} = m.$$

Corollaire 28. Si f est holomorphe et injective sur un ouvert Ω , alors $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$.

En effet, s'il y avait un point z_0 tel que $f'(z_0) = 0$, alors on pourrait appliquer le théorème 27 avec $m \geq 2$, et les valeurs proches de $f(z_0)$ auraient plus d'un antécédent dans un voisinage de z_0 , donc f ne serait pas injective.

Corollaire 29. (Théorème de l'application ouverte). Si f est holomorphe et non constante sur un ouvert connexe Ω , alors l'image de tout ouvert par f est un ouvert.

En effet, considérons un ouvert $U \subset \Omega$; si $z_0 \in U$, on applique le théorème ci-dessus à l'ouvert U et $D(z_0, r_1) \subset U$ donc $f(U) \supset D(f(z_0), r_2)$, donc tout point $f(z_0)$ de l'ensemble $f(U)$ a un voisinage contenu dans $f(U)$: $f(U)$ est bien un ouvert.

Dans le même esprit, on peut utiliser la formule des résidus pour calculer l'inverse local d'une fonction holomorphe quand elle est injective.

Théorème 30. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, injective sur $\overline{D}(a, r)$. Soit $G := f(D(a, r))$. Pour tout $w \in G$, $f^{-1}(w)$ est bien uniquement définie et

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz.$$

Remarque : on pourrait remplacer le cercle par une courbe de Jordan orientée dans le sens trigonométrique, et le disque par l'intérieur de la courbe.

Théorème 31. (de Rouché) Soient Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} , $S \subset \Omega$ un ensemble sans point d'accumulation dans Ω , $f, g \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$, qui n'admet aux points de S que des pôles ou des singularités éliminables. Soit $\gamma \subset \Omega \setminus S$ une courbe de Jordan orientée dans le sens trigonométrique telle que $\hat{\gamma} \subset \Omega$. On suppose que pour tout $z \in \text{supp } \gamma$,

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|.$$

Alors $Z_f(\hat{\gamma}) - P_f(\hat{\gamma}) = Z_g(\hat{\gamma}) - P_g(\hat{\gamma})$.

Remarques : (1) la plupart du temps, on applique ceci à des fonctions qui n'ont pas de pôles, et donc on compare les nombres de zéros.

(2) L'hypothèse implique en particulier que pour tout $z \in \text{supp } \gamma$, $f(z) \neq 0$ et $g(z) \neq 0$.

Voici une conséquence du Théorème de Rouché qui est légèrement plus faible, mais souvent plus facile à appliquer :

Corollaire 32. Avec les mêmes hypothèses que dans le Théorème 31, si on suppose que $|f(z)| < |g(z)|$ pour tout $z \in \text{supp } \gamma$, alors $Z_f(\hat{\gamma}) - P_f(\hat{\gamma}) = Z_g(\hat{\gamma}) - P_g(\hat{\gamma})$.

En effet, si on pose $g_1 = g$, $f_1 = f - g$, alors
 $|f_1(z) + g_1(z)| = |f(z)| < |g(z)| = |g_1(z)| \leq |f_1(z)| + |g_1(z)|$.

9. DOMAINES SIMPLEMENT CONNEXES.

Dorénavant, nous appellerons *domaine* un ouvert connexe de \mathbb{C} .

Proposition 33. Tout ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ est connexe par lignes brisées, c'est-à-dire que pour tous $a, b \in \Omega$ il existe un chemin γ composé d'un ensemble fini de segments de droites tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

En particulier, tout ouvert connexe de \mathbb{C} est connexe par arcs.

Définition 34. Soient $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ deux courbes qui aient les mêmes extrémités, c'est-à-dire que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ et $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. On dit que γ_0 et γ_1 sont homotopes (avec extrémités fixes) si il existe une application continue

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \Omega \\ \text{telle que } H(0, t) &= \gamma_0(t), \quad H(1, t) = \gamma_1(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \text{et } H(\theta, 0) &= \gamma_0(0), \quad H(\theta, 1) = \gamma_0(1), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned}$$

H est appelée homotopie entre les deux courbes.

Intuitivement, nous avons une famille de courbes $t \mapsto \gamma_\theta(t) := H(\theta, t)$ qui permet de varier continument de γ_0 à γ_1 . On peut voir ceci comme une propriété de connexité par arcs d'un espace de courbes. Attention, nous voulons que cette notion soit invariante par homéomorphisme (bijection bicontinue) et nous avons donc seulement supposé H continue. Même quand γ_0 et γ_1 sont des chemins \mathcal{C}^1 par morceaux, les courbes intermédiaires γ_θ peuvent être très irrégulières.

Théorème 35. *Si γ_0, γ_1 sont des chemins dans Ω qui sont homotopes (avec extrémités fixes), et que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors*

$$\int_{\gamma_0} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta.$$

Définition 36. *Un domaine Ω est dit simplement connexe si deux courbes dans Ω qui ont les mêmes extrémités sont toujours homotopes.*

Exemples.

- (1) Tout domaine convexe est simplement connexe.
- (2) Tout domaine étoilé est simplement connexe.

On dit qu'un domaine Ω est *étoilé* si il existe $z_0 \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$, le segment $[z_0; z] \subset \Omega$. Par exemple, $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ est étoilé en prenant $z_0 = 1$.

- (3) Il noter enfin que tout domaine homéomorphe à un domaine simplement connexe est lui aussi simplement connexe. La démonstration est facile en composant par l'homéomorphisme et son inverse.

Corollaire 37. *Si Ω est un domaine simplement connexe, toute $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ admet une primitive.*

En effet, tout chemin fermé γ quelconque est homotope au chemin constant égal à $\gamma(0)$. D'après le Théorème 35, $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma(0)} f = 0$, et la Proposition 3 montre que f admet une primitive.

Définition 38. *On appelle sphère de Riemann et on note $\hat{\mathbb{C}}$ l'ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, muni de la topologie suivante : pour un point de \mathbb{C} , une base de voisinages est donnée par ses voisinages dans la topologie usuelle de \mathbb{C} , et une base de voisinages de ∞ est donnée par les ensembles $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}$.*

Exercice : $\hat{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à la sphère unité de \mathbb{R}^3 .

Proposition 39. *Si Ω est tel que $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ est connexe, alors toute $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ admet une primitive.*

Remarque : si $F := \mathbb{C} \setminus \Omega$ est connexe et non-borné, alors $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega = F \cup \{\infty\}$ est connexe aussi : en effet il existe une suite $(z_n) \subset F$ telle que $|z_n| \rightarrow +\infty$, donc $\infty \in \overline{F}$ (adhérence dans $\hat{\mathbb{C}}$), et donc $F \cup \{\infty\}$ est connexe.

Par contre, si $F := \mathbb{C} \setminus \Omega$ est contenu dans $D(0, R)$ pour un certain $R > 0$ et non vide, alors $D(0, R)$ et $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}$ sont deux ouverts disjoints de $\hat{\mathbb{C}}$ qui recouvrent $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, qui n'est donc pas connexe.

D'autre part, $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ peut être connexe et $\mathbb{C} \setminus \Omega$ non-connexe : on peut prendre par exemple $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi\}$ (détails laissés au lecteur).

La propriété de simple connexité d'un ouvert $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ est en fait équivalente à plusieurs autres propriétés. Dans le théorème qui suit, l'équivalence entre simple connexité et bijection avec le disque est connue sous le nom de Théorème de l'Application Conforme de Riemann.

Ce dernier théorème a été admis et n'est pas au programme de l'examen, mais aide à comprendre l'ensemble.

Théorème 40. *Soit $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un domaine. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) Il existe une bijection holomorphe entre Ω et $D(0, 1)$.
- (2) Ω est simplement connexe.
- (3) $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ est connexe.
- (4) Toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ admet une primitive.
- (5) Toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$ admet un logarithme holomorphe.
- (6) Toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$ admet une racine carrée holomorphe.

L'implication (1) \Rightarrow (2) suit du fait que $D(0, 1)$ est convexe et que toute bijection holomorphe ayant un inverse holomorphe, donc continu, alors c'est un homéomorphisme.

L'implication (2) \Rightarrow (3) peut se démontrer par contraposée : si $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ n'est pas connexe, on peut construire un chemin fermé tel que son indice par rapport aux points d'une partie bornée de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ soit non-nul, et donc qui ne soit par homotope à une constante (**admis**).

L'implication (3) \Rightarrow (4) est la Proposition 39.

L'implication (4) \Rightarrow (5) se démontre en prenant $L(z)$ une primitive de $f'(z)/f(z)$, car alors

$$\frac{d}{dz} (f(z) \exp(-L(z))) = (f'(z) - L'(z)f(z)) \exp(-L(z)) = 0,$$

et en ajoutant si besoin est une constante à L , on obtient $f(z) \exp(-L(z)) \equiv 1$.

L'implication (5) \Rightarrow (6) se démontre en posant $f(z)^{1/2} = \exp(\frac{1}{2}L(z))$, si L est un logarithme de f .

L'implication (6) \Rightarrow (1) est difficile, et constitue l'essentiel du Théorème de Riemann ; l'application est construite dans l'esprit du cas d'égalité du Lemme de Schwarz, en montrant qu'on peut trouver une suite d'applications qui maximisent le module d'une certaine dérivée, et que sa limite existe et est bijective (**admis**).