UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2017-18
TD 7 - SUITES DE FONCTIONS, BIJECTIONS HOLOMORPHES

PASCAL J. THOMAS

1. Bijections holomorphes

1.1. Montrer que si Ω est un ouvert connexe tel que $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ soit connexe, alors pour tout cycle γ contenu dans Ω, pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\mathrm{Ind}(\gamma; w) = 0$. En déduire que toute fonction f analytique sur Ω admet une primitive.

1.2. Soit $\Omega := \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$. Ce domaine n'est pas simplement connexe (pourquoi ?).

Nous voulons démontrer que $f(z) := z^2 - 1$ admet une racine carrée sur Ω.

a) Si $g(z)^2 = f(z)$ et $g(x) > 0$ pour $x \in (1, \infty)$, montrer que l'argument de g peut être défini sur chacun des demi-plans supérieur et inférieur fermés (privés de l'origine). Puis montrer que ces déterminations coïncident pour $x \in (-\infty, -1)$, et concluez, en vous servant du fait qu'une racine carrée continue d'une fonction holomorphe est toujours holomorphe.

b) Voici une autre démonstration : $f(z) := z^2(1 - \frac{1}{z^2})$, donc il suffit de trouver une racine carrée de $f_1(z) := 1 - \frac{1}{z^2}$.

Montrez qu'il existe une bijection holomorphe de $\hat{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ sur $\mathbb{D}$ en utilisant les étapes suivantes :

L'application $z \mapsto 1/(1-z)$ est une bijection holomorphe de $\hat{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ sur $\mathbb{C} \setminus [\frac{1}{2}, +\infty)$.

Avec un bon choix d'argument, l'application $z \mapsto (z - \frac{1}{2})^{1/2}$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{C} \setminus [\frac{1}{2}, +\infty)$ sur $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$.

Finalement, utilisez le fait que toute fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$ (ou sur un demi-plan, au demeurant) admet une racine carrée holomorphe (pourquoi ?)

1.3. Montrer que dans un domaine simplement connexe Ω, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admet une racine carrée holomorphe si et seulement si pour tout $a \in \Omega$, $m_f(a) \in 2\mathbb{Z}$ (la multiplicité d'un zéro éventuel de f est toujours paire).

a) Montrer que la condition est nécessaire.

b) Montrer la réciproque quand f n'a qu'un nombre fini de zéros. Indication : diviser par un polynôme approprié.

* c) On rappelle qu'il existe , une exhaustion de Ω par des compacts $(K_n)_n$, c'est-à-dire une suite de compacts tels que $K_n \subset K_{n+1}^\circ \subset \Omega$ and $\Omega = \cup_n K_n$. On peut prendre

$$K_n := \left\{ z \in \Omega : \mathrm{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n} \text{ et } |z| \leq n \right\}.$$

Montrer le cas général grâce à la question précédente et en construisant une suite de fonctions $g_n \in \mathcal{O}(K_n^\circ)$ telles que $g_n^2 = f$ sur K_n.

1.4. Démontrer qu'il n'existe pas de bijection holomorphe entre $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ et $\Omega := \{z : r < |z| < R\}$, où $r > 0$ (alors que ces deux domaines sont homéomorphes — pouvez-vous écrire un homéomorphisme ?).

Méthode: par l'absurde ; s'il existe une application holomorphe φ de $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ dans Ω, montrez qu'elle s'étend à une application de $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ dans $\overline{\Omega}$, puis utilisez le Théorème de l'Application Ouverte.

1.5. Soient Ω_1 et Ω_2 des domaines qui soient tous les deux en bijection avec $\mathbb{D}$.

Soit f une bijection holomorphe entre Ω_1 et Ω_2. Montrer que pour toute application holomorphe $h : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ qui vérifie $h(z_0) = f(z_0)$, alors $|h'(z_0)| \leq |f'(z_0)|$. Indication : se ramener au disque et appliquer le Lemme de Schwarz.

2. Suites de fonctions holomorphes

2.1. Soit Ω un ouvert connexe, et $(f_n)_n \subset \mathcal{O}(\Omega)$ une suite qui converge vers f, uniformément sur les compacts. On suppose que $f_n(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$, et que $f \not\equiv 0$.

On suppose qu'il existe $a \in \Omega$ tel que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\delta > 0$ tels que $|f(z)| \geq \delta > 0$ sur $\partial D(a, r)$.

En appliquant le théorème de Rouché's avec $f_n = f + (f_n - f)$, montrer que f_n devrait s'annuler sur le disque $D(a, r)$, et conclure que f ne s'annule pas sur Ω.

(Théorème de Hurwitz)

2.2. Montrer que si $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ est une famille de fonctions uniformément bornée sur chaque compact de Ω (on dit aussi "localement bornée"), alors la famille de leurs d'erivées $\mathcal{F}' := \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ est elle aussi uniformément bornée sur chaque compact de Ω.

Indication : estimées de Cauchy.

Donner un contre exemple très simple qui montre que la réciproque est fausse. Quelle condition additionnelle simple peut-on ajouter pour obtenir la réciproque, dans le cas où Ω est connexe ?

2.3. a) Rappel de topologie : si A est un sous-ensemble relativement compact d'un espace métrique, une suite $(a_n)_n \subset A$ converge vers l si et seulement si toute sous-suite convergente $(a_{n_k})_k$ converge vers l.

b) Soit Ω un domaine (connexe) et $A \subset \Omega$ un sous-ensemble avec un point d'accumulation dans Ω (A n'est pas discret). Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{O}(\Omega)$ une suite localement bornée de fonctions holomorphes. Le Théorème de Montel nous dit que cette suite est relativement compacte dans l'espace des fonctions holomorphes.

On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que pour tout $a \in A$, $f_n(a) \to f(a)$. Montrer $f_n \to f$, uniformément sur les compacts de Ω (Théorème de Vitali).