UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2019-20
TD 6 - SÉRIES DE LAURENT, PRINCIPE DE L'ARGUMENT, THÉORÈME DE ROUCHÉ

10. Singularités, divers

10.1. Soit f une fonction holomorphe sur $D(a,r)\setminus\{a\}$ qui vérifie $\operatorname{Re} f(z) > 0$ pour tout $z \in D(a,r) \setminus \{a\}$. Montrer que f admet une singularité éliminable en a. Indication : considérer la fonction $1/(1+f)$.

10.2. Soit f une fonction entière (analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier), et $a \neq b \in \mathbb{C}$. On considère $R > \max(|a|, |b|)$. Calculer

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

On suppose que $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$. Montrer que f est constante (ceci étend un peu le Théorème de Liouville).

10.3. Soient f et g des fonctions entières. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq C|g(z)|$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \lambda g(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

10.4. On définit the *résidu à l'infini* d'une fonction f analytique sur un ensemble du type $\{z : R < |z|\}$ par la formule

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} f(\zeta) d\zeta, \quad r > R.$$

a) Vérifier que ce nombre ne dépend pas de r et qu'il est égal à $\operatorname{Res}(f_1, 0)$ si on définit $f_1(z) := -z^{-2} f(\frac{1}{z})$.

b) On suppose que f est analytique sur $\mathbb{C} \setminus S$, où $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ est un ensemble fini. Montrer que

$$\operatorname{Res}(f, \infty) + \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f, s_k) = 0.$$

c) On dira que f admet (respectivement) une singularité éliminable, un pôle, ou une singularité essentielle à l'infini si $f(\frac{1}{z})$ admet une singularité de ce type en 0. Quelles sont les fonctions entières qui admettent un pôle à l'infini ?

On suppose que f n'admet que des pôles ou des singularités éliminables en tout point de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Montrer que l'ensemble des pôles de f est fini, et qu'il existe deux polynômes P et Q tels que $f(z) = P(z)/Q(z)$.

10.5. Montrer en appliquant le théorème de Casorati-Weierstrass à la fonction $f(\frac{1}{z})$ que toute fonction entière injective est de la forme $f(z) = az + b$ avec $a \neq 0$.

11. Principe de l'Argument, Théorème de Rouché

11.1. a) Soit γ un chemin dans $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage de l'image de γ, notée $\mathrm{supp}(\gamma)$. Si g est une fonction continue sur $\mathrm{supp}(\gamma)$, montrer que

$$\int_{f\circ\gamma} g(z)dz = \int_\gamma g\circ f(\zeta)f'(\zeta)d\zeta.$$

(Il faut démontrer une formule de dérivation des fonctions composées).

b) En utilisant le principe de l'argument, montrer que si U est un ouvert dont la frontière est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et peut être décrite par un cycle γ de telle façon que $U = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Ind}(\gamma; z) = 1\}$; si f est une fonction holomorphe sur un voisinage de $\bar{U}$, qui ne s'annule pas sur ∂U, alors le nombre de solutions de l'équation $f(z) = w$ dans U est égal à $\mathrm{Ind}(f \circ \gamma; w)$.

11.2. a) Si g est analytique au voisinage d'un point z_0 et $g(z_0) \neq 0$, montrer qu'il existe $r > 0$ et h analytique sur $D(z_0, r)$ tel que $g(z) = e^{h(z)}$.

b) Si f est analytique au voisinage d'un point z_0 et que $f - f(z_0)$ admet un zéro d'ordre m exactement en z_0, montrer qu'il existe une fonction φ analytique au voisinage de z_0 telle que $f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m$. Retrouver ainsi le théorème sur le comportement local des fonctions holomorphes.

11.3. En utilisant le théorème de l'application ouverte, montrer que si f est analytique et non-constante, alors ni $\mathrm{Re}\, f$ ni $|f|$ n'admettent de maximum local.

11.4. Soient f et g deux fonctions analytiques sur Ω avec $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$. On suppose que si $z \in \partial D(a, r)$, $|g(z)| < |f(z)|$. Montrer que f et $f + g$ admettent le même nombre de zéros dans $D(a, r)$ (comptés avec multiplicités).

11.5. On pose $P(z) = 8z - z^3 + z^4 + \frac{z^5}{1000}$. Combien P admet-il de zéros dans $\mathbb{C}$? Dans le disque $D(0, 1)$? Dans l'anneau $D(0, 3) \setminus \bar{D}(0, 1)$? $D(0, 20) \setminus \bar{D}(0, 3)$?

11.6. Soit f analytique sur Ω avec $\bar{D}(0, 1) \subset \Omega$, f non constante.

a) On suppose que $|f(z)| = 1$ quand $|z| = 1$. Montrer que le nombre de solutions de l'équation $f(z) = w$ (comptées avec multiplicités) ne dépend pas de $w \in D(0, 1)$. En déduire que $f(D(0, 1)) \supset D(0, 1)$.

b) On suppose que $|f(z)| \geq 1$ quand $|z| = 1$ et qu'il existe $z_0 \in D(0, 1)$ tel que $|f(z_0)| < 1$. Montrer que $f(D(0, 1)) \supset D(0, 1)$.

11.7. Soit $\lambda > 1$. Montrer qu'il existe un unique z tel que $\mathrm{Re}\, z > 0$ et $\lambda - e^{-z} - z = 0$, et que cette solution est réelle. Comment se comporte-t-elle quand $\lambda \to 1$?

11.8. Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients complexes. Le theorème d'inversion locale implique que si w est tel que $P(z) - w$ n'a pas de racine multiples, alors les racines de $P(z) - w$ dépendent analytiquement de w.

Montrer plus généralement que si $P_t(z) = \sum_{k=0}^d a_k(t)z^k$, avec a_k une fonction holomorphe sur Ω pour tout k, alors si $t_0 \in \Omega$ vérifie que z_0 est une racine simple de P_{t_0}, il y a une racine de P_t dans un voisinage de t_0 qui dépend analytiquement de t. On parle de dépendance analytique des racines par rapport aux coefficients.