UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2018-19
TD 5 - PRIMITIVES, INDICE, SINGULARITÉS

PASCAL J. THOMAS

1. Primitives

1. Soit $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \geq 1\}$ (le plan complexe privé des deux demi-droites reliant i et ∞ et $-i$ et ∞ le long de l'axe imaginaire).

On pose $\gamma_z(t) := tz$, $0 \leq t \leq 1$, et pour tout $z \in \Omega$,

$$F(z) := \int_{\gamma_z} \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta.$$

a) Montrer que si $D(z,r) \subset \Omega$ et $|h| < r$, alors

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z;z+h]} \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta,$$

où $[z; z+h]$ est le segment de droite de z à $z+h$.

En déduire que F est $\mathbb{C}$-dérivable et que $F'(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $z \in \Omega$.

b) Montrer que $F(0) = 0$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $F(x)$.

c) Montrer que pour tout $z \in \Omega$, $\sin(F(z)) - z\cos(F(z)) = 0$.

2. Pour les exemples suivants d'un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ et d'une fonction $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, trouvez une primitive de f ou démontrez que f n'admet pas de primitive.

(1)

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\varepsilon, -\varepsilon\}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - \varepsilon^2},$$

discutez selon les valeurs de $\varepsilon \in [0, +\infty[$.

(2)

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}, \quad f(z) = \frac{z^2 + 3z}{(z+1)^2(z-1)}.$$

(3)

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (\{-1\} \cup [1, +\infty[), \quad f(z) = \frac{z^2 + 3z}{(z+1)^2(z-1)},$$

(4)

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}.$$

Indication : calculez les résidus de f en chacun de ses pôles. Des courbes fermées bien choisies pourront être utiles.

Pour la dernière question : considérer, pour $z \in \Omega' := \mathbb{C} \setminus [-\infty, 1]$, la fonction

$$F(z) := \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta^2 - 1} d\zeta,$$

où γ_z est le segment de droite joignant 2 à z. Montrer que F est une primitive de f sur Ω', et qu'elle se prolonge par continuité à Ω, en une fonction qui sera une primitive de f.

2. Singularités isolées et séries de Laurent

3. Vérifier que toutes les fonctions ci-dessous admettent une singularité isolée au point 0. Quand ce sont des pôles, donner leur ordre. Dans les quatre premiers cas, donner le développement en série de Laurent (sur l'anneau le plus grand possible, à déterminer).

(1) $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$.
(2) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.
(3) $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.
(4) $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z^2}$.
(5) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$.

4. Déterminer les développements en série de Laurent de $f(z) := \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ sur les anneaux $A(0;0,1)$, $A(0;1,2)$ et $A(0;2,+\infty)$.

5. On suppose que la fonction f est analytique avec une singularité isolée en a, et non identiquement nulle. On suppose qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que soit

$$\lim_{z\to a} |z-a|^s |f(z)| = 0, \tag{1}$$

soit

$$\lim_{z\to a} |z-a|^s |f(z)| = +\infty. \tag{2}$$

a) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que (1) est vérifié pour $s > m$ et (2) est vérifié pour $s < m$.

b) Montrer que $m = 0$ si et seulement si a est une singularité éliminable et $f(a) \neq 0$.

c) Montrer que $m < 0$ si et seulement si a est une singularité éliminable et $f(a) = 0$, avec un zéro d'ordre $-m$.

d) Montrer que $m > 0$ si et seulement si a est un pôle d'ordre m.

e) Montrer que a est une singularité essentielle si et seulement si il n'existe aucun $s \in \mathbb{R}$ tel que ni (1) ni (2) ne soit vérifiée.

6. Soit f continue sur $\mathbb{C}$ et analytique sur $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$. Montrer en utilisant le théorème de Morera que f est en fait analytique sur $\mathbb{C}$.

7. Soit $\Omega := \{x+iy : a < y < b\}$ et f analytique sur Ω telle que pour tout $z \in \Omega$, $f(z+1) = f(z)$ (périodique de période 1).

a) Montrer qu'il existe une fonction g analytique sur un anneau (à déterminer) telle que $f(z) = g(e^{2\pi i z})$.

b) En déduire que f admet un développement en "série de Fourier":

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n z},$$

avec convergence uniforme sur tout ensemble de la forme $\{x+iy : a+\varepsilon \leq y \leq b-\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.