UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2017-18
TD 5 - SINGULARITÉS

PASCAL J. THOMAS

1. Singularités isolées et séries de Laurent

1.1. Vérifier que toutes les fonctions ci-dessous admettent une singularité isolée au point 0. Quand ce sont des pôles, donner leur ordre. Dans les quatre premiers cas, donner le développement en série de Laurent (sur l'anneau le plus grand possible, à déterminer).

(1) $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$.
(2) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.
(3) $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.
(4) $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z^2}$.
(5) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$.

1.2. Déterminer les développements en série de Laurent de $f(z) := \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ sur les anneaux $A(0;0,1)$, $A(0;1,2)$ et $A(0;2,+\infty)$.

1.3. On suppose que la fonction f est analytique avec une singularité isolée en a, et non identiquement nulle. On suppose qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que soit

$$\lim_{z \to a} |z-a|^s |f(z)| = 0, \tag{1}$$

soit

$$\lim_{z \to a} |z-a|^s |f(z)| = +\infty. \tag{2}$$

a) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que (1) est vérifié pour $s > m$ et (2) est vérifié pour $s < m$.

b) Montrer que $m = 0$ si et seulement si a est une singularité éliminable et $f(a) \neq 0$.

c) Montrer que $m < 0$ si et seulement si a est une singularité éliminable et $f(a) = 0$, avec un zéro d'ordre $-m$.

d) Montrer que $m > 0$ si et seulement si a est un pôle d'ordre m.

e) Montrer que a est une singularité essentielle si et seulement si il n'existe aucun $s \in \mathbb{R}$ tel que ni (1) ni (2) ne soit vérifiée.

1.4. Soit f continue sur $\mathbb{C}$ et analytique sur $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$. Montrer en utilisant le théorème de Morera que f est en fait analytique sur $\mathbb{C}$.