UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2020-21
TD 4 - EXPONENTIELLE

PASCAL J. THOMAS

5. Exponentielle complexe et autres fonctions intéressantes

5.1. On note $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, $\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$. Montrer que $|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2y + \cos 2x)$. Déterminer tous les nombres *complexes* z tels que $\cos z = 0$.

5.2. Montrer que la fonction cos est bijective de l'ouvert $B := \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$ vers l'ouvert $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$. Calculer la fonction inverse à partir d'une détermination du logarithme.

5.3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp z$. Indication (à démontrer) :

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \sum_{p=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) \frac{z^p}{p!}.$$

5.4. (*) Nous allons montrer qu'il est impossible de trouver une fonction *continue* L sur $D(0,2) \setminus \{0\}$ telle que $e^{L(z)} = z$.

a) Se ramener au cas où $L(1) = 0$ en considérant la fonction $L - i \operatorname{Im} L(1)$.

b) Montrer que l'ensemble $A := \{\theta \in [0, \pi] : \operatorname{Im} L(e^{i\theta}) = \theta$ est fermé (c'est-à-dire stable par limites de suites).

c) Montrer que l'ensemble A est ouvert, c'est-à-dire que pour tout $\theta \in A$, il existe $\delta > 0$ tel que $]\theta - \delta, \theta + \delta[\subset A$. Indication : si $\operatorname{Im} L(e^{i\theta}) \neq \theta$, alors $|\operatorname{Im} L(e^{i\theta}) - \theta| \geq 2\pi$.

d) Conclure que $A = [0, \pi]$ (rappel: un sous-ensemble fermé *et* ouvert de $[0, \pi]$ est vide ou égal à tout l'intervalle).

e) Montrer de même que pour tout $\theta \in [-\pi, 0]$, $\operatorname{Im} L(e^{i\theta}) = \theta$. Conclure.

5.5. (*) Montrer que la fonction $z \mapsto \cos\sqrt{z}$, définie a priori sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ en posant $\sqrt{z} := \exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log} z)$, peut s'étendre en une fonction analytique sur tout $\mathbb{C}$, et donner son développement en série entière.

5.6. Calculer l'image par $z \mapsto 1/(1-z)$ du cercle $\{|z| = 1\}$.

Définition 5.1. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}$ avec $(c, d) \neq (0, 0)$, une *homographie* est l'application $\varphi : S \longrightarrow S$ définie par

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \text{ if } z \in \mathbb{C}, cz+d \neq 0, \quad \varphi(-\frac{d}{c}) = \infty \text{ if } c \neq 0, \\ \varphi(\infty) &= \frac{a}{c} \text{ if } c \neq 0, \quad \varphi(\infty) = \infty \text{ if } c = 0. \end{aligned}$$

Démontrer que l'image d'une droite ou d'un cercle par une homographie est une droite ou un cercle. Comment peut-on décider si on a affaire à un cas ou à l'autre ?