UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2019-20
TD 4 - DÉRIVABILITÉ, PRIMITIVES

PASCAL J. THOMAS

7. Différentielles complexes

7.1. a) On suppose que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est différentiable en un point a. Calculer $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(a)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$.

b) On suppose que $\bar{f} = f$. Montrer que si f est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω, ouvert connexe, alors f est constante. Même question si $|f|$ est constant.

7.2. *Soient Ω_1, Ω_2, Ω_3 des ouverts de $\mathbb{C}$. On suppose que $f : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_3$ et que $g : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ sont différentiables. Calculer $\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial g}{\partial z}$, et $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$.

7.3. On rappelle que $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ désigne le Laplacien. On dit qu'une fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ est *harmonique* sur un ouvert Ω si $\Delta h = 0$ sur Ω.

a) Montrer que $\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$.

b) Soit f une fonction sur un ouvert Ω telle que f et $z \mapsto zf(z)$ soient toutes les deux harmoniques, à valeurs complexes. Montrer que f est holomorphe.

c) Retrouver le fait que si f est $\mathbb{C}$-dérivable (holomorphe), $\operatorname{Re} f$ est harmonique. Application : montrer que $\tan^{-1} \frac{y}{x}$ est harmonique sur $\{x > 0\}$. Plus généralement, si h est harmonique et f holomorphe, alors $h \circ f$ est harmonique.

d) Calculer, quand f est holomorphe, $\Delta |f|^2$ et $\Delta \log |f|$. *Application : la fonction de Green $\log \left| \frac{1-\bar{a}z}{z-a} \right|$ est harmonique sur $D(0,1) \setminus \{a\}$.

7.4. Soit Ω un ouvert connexe du plan complexe. On suppose que f est continue sur Ω, et que e^f est holomorphe sur Ω. La fonction f est-elle holomorphe sur Ω ? Démontrer ou donner un contre-exemple.

7.5. a) Montrer que si g est une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω et que $\Delta g(a) > 0$, alors f ne peut pas admettre de maximum local en a.

*b) Montrer que si $\Delta h(a) \geq 0$, alors h ne peut pas admettre de maximum local strict en a. Indication : sinon, se ramener au cas $\Delta h(a) > 0$ en considérant $h_\varepsilon := h(z) + \varepsilon |z-a|^2$ pour $\varepsilon > 0$ bien choisi.

*c) En utilisant l'exercice 7.3 c, démontrer à nouveau le corollaire du principe du module maximum pour les fonctions analytiques.

8. Primitives

8.1. Montrer que la fonction $z \mapsto \operatorname{Re} z$ n'admet pas de primitive (au sens complexe) sur $\mathbb{C}$. (Source : Fischer & Lieb, p. 40)

8.2. Soit $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z \mapsto z^n$ est une fonction holomorphe sur Ω. Pour quelles valeurs de n admet-elle une primitive ?

Soit $z_0 \in \Omega$. Trouver une primitive F_{z_0} de $\frac{1}{z}$ sur $D(z_0, |z_0|)$.

*A quels domaines (i.e. ouverts connexes) pouvez-vous étendre F_{z_0} comme une fonction holomorphe ?

*Etant donné un de ces domaines, est-il possible de trouver plusieurs extensions différentes ?

8.3. Pour les exemples suivants d'un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ et d'une fonction $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, trouvez une primitive de f ou démontrez que f n'admet pas de primitive.

(1)
$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\varepsilon, -\varepsilon\}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - \varepsilon^2},$$
discutez selon les valeurs de $\varepsilon \in [0, +\infty[$.

(2)
$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}, \quad f(z) = \frac{z^2 + 3z}{(z+1)^2(z-1)}.$$

(3)
$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (\{-1\} \cup [1, +\infty[) , \quad f(z) = \frac{z^2 + 3z}{(z+1)^2(z-1)},$$

(4)
$$\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}.$$

Indication : calculez les résidus de f en chacun de ses pôles. Des courbes fermées bien choisies pourront être utiles.

Pour la dernière question : considérer, pour $z \in \Omega' := \mathbb{C} \setminus [-\infty, 1]$, la fonction
$$F(z) := \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta^2 - 1} d\zeta,$$
où γ_z est le segment de droite joignant 2 à z. Montrer que F est une primitive de f sur Ω', et qu'elle se prolonge par continuité à Ω, en une fonction qui sera une primitive de f.

8.4. Soit $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \geq 1\}$ (le plan complexe privé des deux demi-droites reliant i et ∞ et $-i$ et ∞ le long de l'axe imaginaire).

On pose $\gamma_z(t) := tz$, $0 \leq t \leq 1$, et pour tout $z \in \Omega$,
$$F(z) := \int_{\gamma_z} \frac{1}{1 + \zeta^2} d\zeta.$$

a) Montrer que si $D(z, r) \subset \Omega$ et $|h| < r$, alors
$$F(z + h) - F(z) = \int_{[z;z+h]} \frac{1}{1 + \zeta^2} d\zeta,$$
où $[z; z + h]$ est le segment de droite de z à $z + h$.

En déduire que F est $\mathbb{C}$-dérivable et que $F'(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $z \in \Omega$.

b) Montrer que $F(0) = 0$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $F(x)$.

c) Montrer que pour tout $z \in \Omega$, $\sin(F(z)) - z \cos(F(z)) = 0$.