UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2018-19
TD 4 - DÉRIVABILITÉ, HARMONICITÉ

PASCAL J. THOMAS

1. a) On suppose que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est différentiable en un point a. Calculer $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(a)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$.

b) On suppose que $\bar{f} = f$. Montrer que si f est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω, ouvert connexe, alors f est constante. Même question si $|f|$ est constant.

2. *Soient Ω_1, Ω_2, Ω_3 des ouverts de $\mathbb{C}$. On suppose que $f : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_3$ et que $g : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ sont différentiables. Calculer $\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial g}{\partial z}$, et $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$.

3. On rappelle que $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ désigne le Laplacien. On dit qu'une fonction h est *harmonique* sur un ouvert Ω si $\Delta h = 0$ sur Ω.

a) Montrer que $\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$.

b) Retrouver le fait que si f est $\mathbb{C}$-dérivable (holomorphe), $\operatorname{Re} f$ est harmonique. Application : montrer que $\tan^{-1} \frac{y}{x}$ est harmonique sur $\{x > 0\}$. Plus généralement, si h est harmonique et f holomorphe, alors $h \circ f$ est harmonique.

c) Montrer que si h est harmonique (réelle), alors $\frac{\partial h}{\partial z}$ est holomorphe.

d) Calculer, quand f est holomorphe, $\Delta |f|^2$ et $\Delta \log |f|$. *Application : la fonction de Green $\log \left| \frac{1 - \bar{a} z}{z - a} \right|$ est harmonique sur $D(0,1) \setminus \{a\}$.

4. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f, g deux fonctions holomorphes sur Ω telles que pour tout $z \in \Omega$, $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(z) = c + g(z)$, où c est une constante réelle.

5. Soit $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z \mapsto z^n$ est une fonction holomorphe sur Ω. Pour quelles valeurs de n admet-elle une primitive ?

Soit $z_0 \in \Omega$. Trouver une primitive F_{z_0} de $\frac{1}{z}$ sur $D(z_0, |z_0|)$. *A quels domaines (i.e. ouverts connexes) pouvez-vous étendre F_{z_0} comme une fonction holomorphe ? *Etant donné un de ces domaines, est-il possible de trouver plusieurs extensions différentes ?

6. Soit Ω un ouvert connexe du plan complexe. On suppose que f est continue sur Ω, et que e^f est holomorphe sur Ω. La fonction f est-elle holomorphe sur Ω ? Démontrer ou donner un contre-exemple.

7. a) Montrer que si g est une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω et que $\Delta g(a) > 0$, alors f ne peut pas admettre de maximum local en a.

*b) Montrer que si $\Delta h(a) \geq 0$, alors h ne peut pas admettre de maximum local strict en a. Indication : sinon, se ramener au cas $\Delta h(a) > 0$ en considérant $h_\varepsilon := h(z) + \varepsilon |z - a|^2$ pour $\varepsilon > 0$ bien choisi.

*c) En utilisant l'exercice 3, démontrer à nouveau le principe du module maximum pour les fonctions analytiques.