UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2017-18
TD 4 - DÉRIVABILITÉ COMPLEXE

PASCAL J. THOMAS

1. Différentielles complexes

1.1. On suppose que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est différentiable en un point a.

a) Montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en a si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$.

b) Calculer $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(a)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$.

c) On suppose que f est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω, ouvert connexe, et que $|f|$ est constant. Montrer que f est constante.

1.2. Soient Ω_1, Ω_2, Ω_3 des ouverts de $\mathbb{C}$. On suppose que $f : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_3$ et que $g : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ sont différentiables. Calculer $\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial g}{\partial z}$, et $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$.

1.3. On rappelle que $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ désigne le Laplacien.

a) Montrer que $\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$.

b) Retrouver ainsi le fait que si f est $\mathbb{C}$-dérivable (holomorphe), $\operatorname{Re} f$ est harmonique.

c) Calculer, quand f est holomorphe, $\Delta |f|^2$ et $\Delta \log |f|$.

1.4. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f, g deux fonctions holomorphes sur Ω telles que pour tout $z \in \Omega$, $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(z) = c + g(z)$, où c est une constante réelle.

1.5. Montrer que la fonction $z \mapsto \operatorname{Re} z$ n'admet pas de primitive (au sens complexe) sur $\mathbb{C}$. (Source : Fischer & Lieb, p. 40)

1.6. Soit $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f_n(z) = z^n$ est une fonction holomorphe sur Ω. Pour quelles valeurs de n admet-elle une primitive ?

Donner une courbe fermée γ dans Ω telle que $\int_\gamma f_{-1}(z)dz \neq 0$.

Soit $z_0 \in \Omega$. Trouver une primitive F_{z_0} de f_{-1} sur $D(z_0, |z_0|)$. A quels domaines (i.e. ouverts connexes) pouvez-vous étendre F_{z_0} comme une fonction holomorphe ? Etant donné un de ces domaines, est-il possible de trouver plusieurs extensions différentes ?

1.7. Soit Ω un ouvert connexe du plan complexe. On suppose que f est continue sur Ω, et que f^2 (le carré pour la multiplication) est holomorphe sur Ω. La fonction f est-elle holomorphe sur Ω ? Démontrer ou donner un contre-exemple.

1.8. Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω telle que $\Delta f(z) \geq 0$, pour tout $z \in \Omega$, alors f n'admet pas de maximum local strict dans Ω. Indication : si z_0 est un tel maximum local, se ramener au cas $\Delta f(z) > 0$ en considérant $f_\varepsilon := f(z) + \varepsilon |z - z_0|^2$ pour $\varepsilon > 0$ bien choisi.