UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2017-18
TD 3 - FORMULE DES RÉSIDUS, PRINCIPE DU MAXIMUM

PASCAL J. THOMAS

Les exercices marqués d'une astérisque (*) ne sont pas essentiels, ou destinés à ceux qui veulent approfondir la théorie.

1. Calculs d'intégrales

1.1. On considère la fonction $f(z) = e^{-z^2}$. Sur quel domaine est-elle analytique ? Pour tout $\xi > 0$, on considère le contour fermé Γ_A composé des quatres segments orientés suivants :

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &:= x, \quad -A \le x \le A, \\ \gamma_2(x) &:= A + iy, \quad 0 \le y \le \xi, \\ \gamma_3(x) &:= -x + i\xi, \quad -A \le x \le A, \\ \gamma_4(x) &:= -A + i(\xi - y), \quad 0 \le y \le \xi. \end{aligned}$$

Montrer que $\lim_{A\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = \lim_{A\to+\infty} \int_{\gamma_4} f(z)dz = 0$.

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$. Montrer en utilisant le théorème de Cauchy appliqué à la fonction f sur le contour Γ_A et en faisant $A \to +\infty$ que

$$e^{\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 - 2\pi i x\xi} dx = 1.$$

On définit la transformée de Fourier par $\mathcal{F}(g)(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} g(x)dx$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = e^{-\pi x^2}$.

1.2. a) Calculer l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ par la méthode des résidus.

b) Calculer l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$ par la méthode des résidus.

c) Calculer l'intégrale définie $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$ par la méthode des résidus. On utilisera la parité de la fonction.

1.3. a) Calculer la transformée de Fourier de $g(x) := \frac{1}{1+x^2}$ par la méthode des résidus. Vous devrez distinguer les cas $\xi \ge 0$ et $\xi < 0$.

*b) Nous allons calculer la transformée de Fourier de la fonction “sinus cardinal”, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. Une conséquence de votre cours d'analyse hilbertienne est qu'on peut écrire ici $\mathcal{F}(g)(\xi) = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} e^{-2\pi i x\xi} g(x)dx$.

Montrez que

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} e^{-2\pi i x\xi} g(x)dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A} e^{-2\pi i x\xi} g(x)dx\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A} e^{-2\pi i x\xi}\frac{e^{ix}}{2ix}dx\right) - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A} e^{-2\pi i x\xi}\frac{e^{-ix}}{2ix}dx\right)\end{aligned}$$

(une partie de la question est de montrer que ces deux dernières limites existent !)

Calculer les limites quand $\varepsilon \to 0$ et $A \to +\infty$ de ces dernières intégrales en utilisant la formule des Résidus et le Lemme de Jordan. Vous serez amenés à distinguer les cas $\xi < -\frac{1}{2\pi}$, $-\frac{1}{2\pi} < \xi < \frac{1}{2\pi}$, $\frac{1}{2\pi} < \xi$.

Quelle célèbre formule d'inversion aurait pu vous épargner ce fastidieux travail ?

1.4. a) Calculer l'intégrale définie $\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3}}{1+x^2}dx$ par la méthode des résidus. On utilisera, comme dans le cours, un contour évitant l'origine contenant des portions des cercles centrés en 0 et de rayons ε et R, et des demi-droites $x > 0, y = i\delta$ et $x > 0, y = -i\delta$. On fera $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$, dans cet ordre.

b) Montrer par la même méthode que pour $0 < a < 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-a}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Vous pouvez retrouver cette formule pour $a = \frac{1}{2}$ par des moyens élémentaires.

1.5. a) Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}$$

en utilisant le contour constitué du segment de droite de 0 à $R > 1$, puis de l'arc de cercle centré en 0 qui va de R à $Re^{2\pi i/n}$, puis du segment qui va de $Re^{2\pi i/n}$ à 0.

*b) Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}dx}{1+x^n}$$

en utilisant le contour constitué du segment de droite de ε à R, puis de l'arc de cercle centré en 0 qui va de R à $Re^{2\pi i/n}$, puis du segment qui va de $Re^{2\pi i/n}$ à $\varepsilon e^{2\pi i/n}$, puis de l'arc de cercle centré en 0 qui va de $\varepsilon e^{2\pi i/n}$ à ε. (Ici $0 < \varepsilon < 1 < R$).

1.6. * On considère le contour Γ_n qui parcourt une fois dans le sens trigonométrique le bord du rectangle de sommets $(n+\frac{1}{2}+ni, -(n+\frac{1}{2})+ni, -(n+\frac{1}{2})-ni, n+\frac{1}{2}-ni)$.

Pour $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, on pose $f(z) = \dfrac{1}{(z+a)^2}\dfrac{\cos z}{\sin z}$.

Déterminer les pôles de f et ses résidus en ces pôles.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma_n} f(z)dz = 0$, et en déduire l'identité

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(a+n)^2}.$$

2. Principe du Module Maximum

2.1. Montrer le Lemme de Schwarz : si f est analytique sur le disque unité $\mathbb{D}$ et continue jusqu'au bord, et que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et que $f(0) = 0$, alors $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ et $|f'(0)| \leq 1$. Si de plus une de ces inégalités est une égalité (pour une seule valeur de z), alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta} z$.

2.2. Soit f analytique sur un ouvert Ω. Sous quelles conditions $|f|$ peut-elle admettre un *minimum* local?

Indication : considérer la fonction $1/f$.

On suppose que f est analytique sur un ouvert connexe borné Ω et continue jusqu'au bord. Montrer que soit f s'annule en au moins un point de Ω, soit $|f|$ atteint son minimum en un point de $\partial\Omega$.

2.3. Soient f, g holomorphes sur $\mathbb{D}$ et continues sur $\overline{\mathbb{D}}$. On suppose que pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, $f(z) \neq 0, g(z) \neq 0$ et que $|f(z)| = |g(z)|$ pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f = e^{i\theta} g$. Que se passe-t-il si on admet des zéros pour f ou g ?

2.4. a) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω. Soit Ω' un ouvert non vide, relativement compact dans Ω. On suppose que $|f|$ est constant sur la frontière de Ω'. Montrer que f est constante sur Ω ou s'annule au moins une fois dans Ω'. (Indication : considérer la fonction $1/f$).

*b) Que se passe-t-il si on suppose plutôt que f prend des valeurs réelles sur la frontière de Ω'? (Indication : considérer $\frac{f-yi}{f+yi}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$).

2.5. Vérifiez que our tout point a du disque unité, l'application

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - z\bar{a}}$$

est une bijection biholomorphe du disque unité dans lui-même. Pour montrer que $|\varphi_a(z)| < 1$ pour $|z| < 1$, faites d'abord le calcul pour $|z| = 1$.

Soit f une fonction holomorphe du disque unité dans lui-même, telle qu'il existe deux points $a \neq b$ du disque vérifiant $f(a) = a$, $f(b) = b$. Montrer que $f(z) = z$, pour tout z du disque.

(Indication : Lemme de Schwarz).

2.6. On suppose que f est analytique dans un voisinage du disque fermé $\overline{D}(0, R)$, que $f(0) = 1$ et que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \overline{D}(0, R)$. Soient $a_1, \ldots, a_N$ les zéros de f comptés avec leur multiplicité (un zéro double compte deux fois, etc) dans le disque $\overline{D}(0, R/3)$. Montrer que $N \leq \frac{1}{\ln 2} \ln M$.

Indication : appliquer le principe du maximum au point 0 à la fonction

$$g(z) := \frac{f(z)}{\prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)}.$$