

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2017-18
TD 2 - ZÉROS ISOLÉS, FORMULE ET INÉGALITÉS DE CAUCHY

PASCAL J. THOMAS

Les exercices marqués d'une astérisque (*) ne sont pas essentiels, ou destinés à ceux qui veulent approfondir la théorie.

1. ZÉROS ISOLÉS, PROLONGEMENT ANALYTIQUE

1.1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique sur un disque $D(0, r)$ avec $r > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ et $f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.

1.2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique sur un disque $D(0, r)$ avec $r > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1/r$, $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{n}$ et $f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$.

1.3. Soit f analytique sur un disque $D(0, r)$ avec $r > 0$. On suppose que $|f(z)| \leq e^{-1/|z|}$. Montrer que f est identiquement nulle.

1.4. (*) Montrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique sur un disque $D(0, r)$ avec $r > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1/r$, $f(\frac{1}{n}) = e^{-n}$.

Indication : si $f \not\equiv 0$, considérer le plus petit indice k tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$.

1.5. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique sur un disque $D(0, r)$ avec $r > 0$ telle que $f(z)^2 = z$ pour tout $z \in D(0, r)$.

Indications : calculer la dérivée de la fonction z en 0.

1.6. Soient f, g deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe Ω . On suppose que $f(z)g(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer alors que soit $f \equiv 0$ soit $g \equiv 0$ sur Ω .

1.7. Nous allons montrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique sur $\Omega := D(0, r) \setminus \{0\}$ (avec $r > 0$) telle que $f(z)^2 = z$ pour tout $z \in \Omega$.

a) On pose $\Omega_1 := D(0, r) \setminus]-r, 0]$ et $r_1(z) := \exp(\frac{1}{2}\text{Log } z)$, $r_2(z) := -\exp(\frac{1}{2}\text{Log } z)$. Montrer qu'il existe $j \in \{1, 2\}$ tel que $f(z) = r_j(z)$ pour tout $z \in \Omega_1$ (indication : exercice 1.6).

b) En déduire que f ne peut pas être continue au point $-\frac{1}{2}$.

2. FORMULE ET INÉGALITÉS DE CAUCHY

2.1. Soit f une fonction analytique sur \mathbb{C} tout entier telle qu'il existe $A, B > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $|f(z)| \leq A|z|^m + B$. Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à m .

2.2. a) Soit f une fonction analytique sur $D(0, r)$ avec $r > 1$. Soit γ la courbe qui parcourt une fois le cercle unité dans le sens trigonométrique. Montrer que $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$. Indication : appliquer la formule de Cauchy à $g(z) := zf(z)$.

b) Soit P un polynôme (en z). Montrer que $\max_{|z|=1} |\bar{z} - P(z)| \geq 1$. Indication : multiplier par z et intégrer sur le cercle pour trouver une contradiction...

2.3. Soit f une fonction analytique sur C tout entier. On suppose que pour tout $r > 0$,

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq r^{17/3}.$$

Montrer que f est identiquement nulle. (Indication : considérer $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$).

2.4. Soit f une fonction analytique sur C tout entier. On suppose que $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ pour tout z . Montrer que f est constante.

Indication : considérer la fonction $g(z) = 1/(1 + f(z))$.