UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2020-21
TD 2 - FORMULE ET INÉGALITÉS DE CAUCHY

PASCAL J. THOMAS

3. Formule et Inégalités de Cauchy

3.1. Soit C le chemin fermé donné par $C(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(a) Calculer $\int_C \frac{1}{z+2} dz$. En déduire $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{2+\cos\theta+i\sin\theta} d\theta$.

(b) Calculer $\int_C \frac{z}{z-\frac{1}{2}} dz$. En déduire $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta + i\sin\theta - \frac{1}{2}} d\theta$.

3.2. Soit f une fonction holomorphe ($\mathbb{C}$-dérivable en tout point) et $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert qui contient le disque fermé $\overline{D}(0,1)$. On suppose que $|f(z)| \leq 1$ pour tout z tel que $|z| = 1$.

(a) Montrer grâce à la formule de Cauchy que $|f(z)| \leq 2$ pour tout z tel que $|z| \leq 1/2$.

(*) (b) Est-ce le meilleur résultat possible ? Par exemple, si $z = 1/2$, considérer séparément les intégrales sur le cercle unité pour $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ et pour $\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$, et améliorer la borne. Peut-on faire encore mieux ? Quel devrait être le meilleur résultat ?

3.3. Soit f une fonction holomorphe et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$ tout entier telle qu'il existe $A, B > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $|f(z)| \leq A|z|^m + B$. Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à m.

3.4. Soit P un polynôme (en z). Montrer que $\max_{|z|=1} |\bar{z} - P(z)| \geq 1$. Indication : quand $|z| = 1$, alors $\bar{z} = 1/z$. Intégrer sur le cercle.

3.5. Soit f une fonction holomorphe et $\mathcal{C}^1$ sur C tout entier. On suppose que pour tout $r > 0$, $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq r^{7/2}$. Montrer que f est identiquement nulle. (Indication : considérer $r \to 0$ et $r \to \infty$).

3.6. Montrer que si f est continue sur un disque D, et holomorphe et $\mathcal{C}^1$ sur $D \setminus \{z_0\}$, alors pour toute courbe γ de Jordan, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, contenue dans D, $\int_\gamma f(z)dz = 0$. (Si z_0 est à l'intérieur de γ, on admettra qu'on peut construire une courbe ξ qui soit $\mathcal{C}^1$ par morceaux et qui relie z_0 à un point de γ).

3.7. (a) Soit f une fonction holomorphe et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$ tout entier. On suppose que $|f(z)| \geq 1$ pour tout z. Montrer que f est constante.

(b) Soit f une fonction holomorphe et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$ tout entier. On suppose que $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ pour tout z. Montrer que f est constante. Indication : considérer la fonction $g(z) = 1/(1 + f(z))$.

(*) (c) Montrer que si f est holomorphe et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$ tout entier, alors $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.